Ueber

Singularitäten ebener algebraischer Curven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen naturwissenschaftlichen Facultät der Eberhard-Carls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt

von

Wilhelm Köstlin

aus Stuttgart.

Dresden,

Druck von B. G. Teubner.

1895.

Ueber

Singularitäten ebener algebraischer Curven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen naturwissenschaftlichen Facultät der Eberhard-Carls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt

von

Wilhelm Köstlin

aus Stuttgart.

Dresden,

Druck von B. G. Teubner.

1895.

Von der Facultät angenommen den 30. Mai 1894.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit hat sich das Ziel gesteckt, das Verhalten der adjungirten Curve in einer durch ihre Reihenentwicklungen definirten Singularität einer ebenen algebraischen Curve zu untersuchen. Eine solche Reihenentwicklung ist ein im Allgemeinen irrationaler Ausdruck hinsichtlich einer Coordinate, durch welche die andere Coordinate dargestellt wird. Man kann verlangen, diese Beziehung in die Form einer rationalen Gleichung zwischen den beiden Coordinaten umzuwandeln, sofern die Entwicklung bei irgend einer (übrigens beliebig hohen) Potenz abgebrochen wird. Dies ist der Zweck der Untersuchungen in §§ 1, 2. Dabei zeigt sich, dass auch in der rationalen Form die sogenannten „kritischen Exponenten" eine ausgezeichnete Rolle spielen. Die nähere Untersuchung dieser Form führte mich darauf, ein graphisches Verfahren für die Reihenentwicklung zu verwerthen, das, in einer Verbindung der Methoden von Puiseux und Cramer bestehend, die Diagramme sämmtlich in einer Figur vereinigt. Sie ermöglichte die Aufstellung der rationalen Form einer Curve, welche im Ursprung einen „superlinearen Zweig" (nach Cayley) mit gegebenen kritischen Exponenten besitzt. Zugleich gab sie die Hilfsmittel an die Hand, die Zahl der linearen Zweige mit nicht übereinstimmenden Tangenten zu bestimmen, welche die Bedingung des Adjungirtseins in einem gegebenen superlinearen Zweig erfüllen, eine Zahl, die blos abhängig ist von den kritischen Exponenten. Die allgemeinste adjungirte Curve (mit der grösstmöglichen Anzahl von willkürlichen Constanten) ist nicht von den kritischen Exponenten allein abhängig, sondern von sämmtlichen Gliedern der Reihenentwicklungen. Ihre Form für einen superlinearen Zweig liess sich herleiten aus der der Reihenentwicklung entsprechenden rationalen Form.

Es sei mir noch erlaubt, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. A. Brill, für die vielseitige Anregung und Unterstützung, die er mir bei dieser Arbeit zu Theil werden liess, meinen Dank auszusprechen.

§ 1.

Die zu einer Potenzreihenentwicklung mit gebrochenen Exponenten gehörige rationale Form der Gleichung zwischen den Variabeln.

Die Art der Singularität einer beliebigen algebraischen Curve, die im Ursprung eines Cartesischen Coordinatensystems einen singulären Punkt hat, ist bestimmt, sobald die Reihenentwicklungen der einen Coordinaten y nach steigenden Potenzen der anderen x mit positiven ganzen oder gebrochenen Exponenten bekannt sind. Puiseux hat gezeigt*, dass, wenn die Exponenten gebrochen sind, sich eine Anzahl (Δ) von Entwicklungen zu einem sogenannten cyklischen System von folgender Form zusammenfassen lassen:

$$y_n = a_n x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} + b_n x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} + \cdots,$$

wo $n = 1, 2, \ldots \Delta$, ferner $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots$, und zwar ganze Zahlen, und, wenn die Y-Achse nicht Curventangente ist, auch $\alpha_1 \geqq \Delta$ ist. Die einzelnen Entwicklungen unterscheiden sich nur durch die Coefficienten a_n, $b_n, \ldots$, welche von der Form sind:

$$a_n = a_1 w_n^{\alpha_1}, \quad b_n = a_2 w_n^{\alpha_2}, \ldots,$$

wo die a Constante sind, und w_1, $w_2 \ldots w_\Delta$ die Wurzeln der binomischen Gleichung $w^\Delta - 1 = 0$ bedeuten. Ein solches cyklisches System stellt innerhalb des Convergenzbereiches der Reihenentwicklung einen durch den Ursprung gehenden Zweig vollständig dar, und wir nennen einen solchen Zweig mit Cayley einen superlinearen Zweig von der Ordnung Δ.

Wir betrachten in Folgendem einen superlinearen Zweig für sich allein und stellen uns zunächst die Aufgabe, die rationale Form der Gleichung einer Curve herzustellen, welche im Ursprung einen durch ein cyklisches System von Reihenentwicklungen gegebenen superlinearen Zweig enthält. Das cyklische System sei folgendes:

$$1) \quad \begin{cases} y - a_1 w_1^{\alpha_1} x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} - a_2 w_1^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} - \cdots - a_n w_1^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_n}{\Delta}} - \ldots = 0 \\ y - a_1 w_2^{\alpha_1} x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} - a_2 w_2^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} - \cdots - a_n w_2^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_n}{\Delta}} - \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y - a_1 w_\Delta^{\alpha_1} x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} - a_2 w_\Delta^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} - \cdots - a_n w_\Delta^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_n}{\Delta}} - \ldots = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Δ Gleichungen mit einander, so erhält man bekanntlich einen rationalen Ausdruck in x und y, der umgekehrt sich

---

* Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques; Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées. t. 15. 1850. Deutsch von Fischer, Halle 1861.

wieder in die gegebenen Reihenentwicklungen spalten lassen muss. Da aber im Allgemeinen die Reihenentwicklungen unendlich sind, so wären unendlich viele Glieder mit einander zu multipliciren, und so würde sich auch eine Gleichung vom Grad unendlich in x ergeben. Nun kommt es aber blos auf das Verhalten des Zweigs in der Nähe des Ursprungs an; die Reihenentwicklungen denken wir uns überhaupt für die Theorie der Curve zunächst in der Absicht hergestellt, das Verhalten der Singularität gegenüber Geschlecht, Klasse etc. der Curve zu bestimmen, d. h. um die Plücker'schen Aequivalenzzahlen, die Zahlen, welche angeben, wie viel elementare Singularitäten (Doppelpunkte, Spitzen, Doppeltangenten, Rückkehrtangenten) die gegebene Singularität enthält, zu ermitteln. Es hat nun aber H. J. S. Smith* gezeigt, dass diese Aequivalenzzahlen blos von den kritischen Exponenten abhängen. Werden die Reihenentwicklungen also bei den Gliedern mit den letzten kritischen Exponenten abgebrochen, so erhält man beim Ausmultipliciren eine endliche rationale Form, welche eine Curve darstellt, die im Ursprung dieselbe Singularität besitzt, wie der durch die Reihenentwicklungen dargestellte superlineare Zweig. Auch hat Herr Brill** gezeigt, dass, wenn es sich darum handelt, eine algebraische Bedingungsgleichung (mit endlicher Gliederzahl) zwischen x und y in der Nähe eines gewissen Werthepaares $x_0 y_0$ zu erfüllen, nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Reihenentwicklungen nothwendig ist, um einen vorgeschriebenen Genauigkeitsgrad zu erreichen. Unsere Aufgabe wird einstweilen in der Art einzuschränken sein, dass wir verlangen: Es soll eine rationale Gleichung in x und y derart gefunden werden, dass die daraus zu erhaltenden Entwicklungen mit gegebenen Reihenentwicklungen bis zu beliebigen Gliedern übereinstimmen.

Die Reihenentwicklungen 1) mögen also abgebrochen werden nach den Gliedern mit den Coefficienten a_n, und zwar nach dem Glied mit dem letzten kritischen Exponenten (siehe § 2 am Ende). Das Product der Gleichungen 1) giebt dann, wenn die bekannten Bezeichnungen für die symmetrischen Functionen eingeführt werden:

$$\Sigma w_1^{\beta_1} = w_1^{\beta_1} + w_2^{\beta_1} + \cdots w_{\Delta}^{\beta_1},$$

$$\Sigma w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} = w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} + w_1^{\beta_1} w_3^{\beta_2} + \cdots w_{\Delta-1}^{\beta_1} w_{\Delta}^{\beta_2},$$

. . . . . .

folgenden nach Potenzen von y geordneten Ausdruck:

---

* Smith in Proceed. Lond. math. society VI. 1876. Vergl. hierzu das Referat von Nöther in d. Jahrb. d. Math. VIII. S. 433 flg.

** Brill, Ueber Singularitäten ebener Curven, Math. Ann. Bd. XVI. 1880, S. 356 flg.

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} y^{\Delta} - y^{\Delta-1}\left(a_1 \Sigma w_1^{\alpha_1}.x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} + \cdots a_n \Sigma w_1^{\alpha_n}.x^{\frac{\alpha_n}{\Delta}}\right) \\ \quad + y^{\Delta-2}\left(a_1^{\,2} \Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2}.x^{\frac{2\alpha_1}{\Delta}} + \cdots a_n^2 \Sigma w_1^{\alpha_n} w_2^{\alpha_n}.x^{\frac{2\alpha_n}{\Delta}}\right. \\ \qquad \left. + a_1 a_2 \Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2}.x^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\Delta}} + \cdots a_{n-1} a_n \Sigma w_1^{\alpha_{n-1}} w_2^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{\Delta}}\right) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \left((-a_1)^{\Delta} \Sigma w_1^{\alpha_1} \ldots w_{\Delta}^{\alpha_1} x^{\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta}} + \cdots (-1)^{\Delta} a_1 a_2 \ldots a_{\Delta} \Sigma w_1^{\alpha} w_2^{\alpha_2} \ldots\right. \\ \qquad \left. \times w_{\Delta}^{\alpha_{\Delta}} x^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_{\Delta}}{\Delta}}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Die Berechnung dieser Glieder erfordert in erster Linie die Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$w^{\Delta} - 1 = 0;$$

wir wollen deshalb einige Beziehungen zwischen diesen symmetrischen Functionen vorausschicken.

Es seien

$$s_1, s_2, \ldots s_n$$

die Potenzsummen der Wurzeln obiger binomischen Gleichung, so geben die bekannten Newton'schen Identitäten:

$$s_1 = 0; \quad s_2 = 0; \quad \ldots s_{\Delta-1} = 0; \quad s_{\Delta} = \Delta;$$
$$s_{\Delta+1} = 0; \qquad \ldots s_{2\Delta-1} = 0; \quad s_{2\Delta} = \Delta$$
$$\text{etc.}$$

Allgemein: $\Sigma w_1^n = s_n = \left.\begin{matrix} 0 \\ \Delta \end{matrix}\right\}$ je nachdem n $\begin{matrix} \text{kein} \\ \text{ein} \end{matrix}$ Vielfaches von Δ.

Nun lässt sich aber jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung ausdrücken als Function der Potenzsummen der Wurzeln. Nennt man die Summe der Indices eines Gliedes der in den Potenzsummen ausgedrückten symmetrischen Function sein „Gewicht", so existirt der Satz (vergl. Faà di Bruno, Binäre Formen, deutsch von Walter § 1): Die symmetrische Function von der Form $\Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_r^{\alpha_r}$, in den Potenzsummen ausgedrückt, ist „isobarisch", d. h. alle Glieder haben das gleiche Gewicht, nämlich $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r$. Es soll nun die symmetrische Function $\Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_r^{\alpha_r}$ der binomischen Gleichung $w^{\Delta} - 1 = 0$ in den Potenzsummen ausgedrückt werden, wobei die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r$ nicht durch Δ theilbar sei. Die Indices der Grössen s irgend eines Gliedes des Ausdrucks in den Potenzsummen setzen sich additiv aus Summanden der Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r$ derart zusammen, dass die Summe der Indices des Gliedes gleich $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r$; da diese Summe aber nicht durch Δ theilbar ist, so muss auch mindestens einer jener Indices nicht durch Δ theilbar sein. Weil aber $s_n = 0$, wenn n nicht durch Δ theilbar ist, so muss mindestens ein Factor eines jeden Gliedes des Ausdrucks

in den Potenzsummen gleich Null sein, und es ergiebt sich also der Satz: Die symmetrische Function $\Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_r^{\alpha_r}$ der Gleichung $w^{\Delta} - 1 = 0$ ist gleich Null, wenn die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r$ nicht durch Δ theilbar ist. Betrachtet man nun den Ausdruck 2) und berücksichtigt man, dass diese symmetrische Function ein Factor des Coefficienten der Potenz $x^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_r}{\Delta}}$ ist, so folgt, dass der Coefficient einer jeden gebrochenen Potenz von x Null ist. Der Ausdruck 2), der durch Multiplication der Δ conjugirten Gleichungen eines cyklischen Systems erhalten wurde, ist also rational.

Es erübrigt nun blos noch, die Coefficienten der nicht verschwindenden Glieder des Ausdrucks 2) zu bestimmen. Zu diesem Zweck benützen wir die Waring'sche Formel für die symmetrischen Functionen einer beliebigen algebraischen Gleichung (vergl. Serret, Höhere Algebra, deutsch von Wertheim, 2. Aufl. S. 370 u. flg.). Es ist zu bestimmen eine symmetrische Function von der Form $\Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_i^{\alpha_i}$ der binomischen Gleichung $w^{\Delta} - 1 = 0$, wo $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_i \equiv 0 \ (mod\ \Delta)$.

Man vertheile die i Indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$ auf alle möglichen Arten in Gruppen von beliebig vielen Zahlensummanden derart, dass für jede Anordnung dieser Indices jeder Index nur einmal vorkommt und dass die Summe der Indices einer jeden Gruppe durch Δ theilbar ist. Bei irgend einer Anordnung seien die Anzahlen der Summanden, die aus je $1, 2, 3, \dots i$ Indices sich zusammensetzen, beziehungsweise $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_i$. Die Summen der Zahlenwerthe der Indices, der bei dieser Anordnung wirklich auftretenden μ Gruppen seien $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\mu$, wo also $\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_i$ ist. Dann entspricht diese Anordnung dem Gliede:

$$(-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_i} \Gamma_{(2)}^{\lambda_2} \Gamma_{(3)}^{\lambda_3} \dots \Gamma_{(i)}^{\lambda_i} s_{\beta_1} s_{\beta_2} \dots s_{\beta_\mu},$$

wobei

$$\Gamma_{(m)} = 1.2.3 \dots (m-1).$$

Wegen

$$s_{\beta_1} = s_{\beta_2} = \cdots = s_{\beta_\mu} = \Delta,$$

weil ja jede der Grössen β durch Δ theilbar ist, wird obiges Glied:

$$(-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_i} \Gamma_{(2)}^{\lambda_2} \Gamma_{(3)}^{\lambda_3} \dots \Gamma_{(i)}^{\lambda_i} \Delta^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_i}.$$

Ist die Vertheilung der Indices in λ_1 Gruppen zu je einem Index, λ_2 Gruppen zu je zwei Indices etc. durch Permutation der Indices auf A Arten möglich, so entspricht jeder Art ein Glied von angegebener Form. Berücksichtigt man endlich alle möglichen Gruppenvertheilungen, so erhält man die Specialisirung der Waring'schen Formel für die binomische Gleichung $w^{\Delta} - 1 = 0$ in folgender Form:

$$3) \quad \Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_i^{\alpha_i} = \Sigma (-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_i} A . \Gamma_{(2)}^{\lambda_2} \Gamma_{(3)}^{\lambda_3} \dots \Gamma_{(i)}^{\lambda_i} \Delta^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda}.$$

Diese Formel gilt für den Fall, dass die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ alle ungleich sind. Sind aber μ_1 Exponenten je gleich α_1, μ_2 Exponenten je

gleich α_2 etc., so hat man die angegebene Rechnung durchzuführen, wie wenn die Exponenten ungleich wären, und die rechte Seite obiger Formel noch mit

$$\Gamma_{(\mu_1+1)} \cdot \Gamma_{(\mu_2+1)} \cdots$$

zu dividiren.

Für den speciellen Fall, dass die Indices $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ so beschaffen sind, dass blos ihre Summe durch Δ theilbar ist, und keine Vertheilung dieser Summe in Einzelsummen derart, dass jede Einzelsumme durch Δ theilbar ist, möglich ist, vereinfacht sich obige Formel wesentlich; denn es ist dann blos eine Gruppenvertheilung möglich, nämlich die, dass sich die Indices in eine Summe von i-Summanden anordnen lassen, so dass also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_{i-1} = 0; \quad \lambda_i = 1.$$

Sind wiederum μ_1 Indices gleich α_1, μ_2 Indices gleich α_2 etc., so erhält man:

$$4) \qquad \Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_1} \ldots w_i^{\alpha_i} = \frac{(-1)^{i-1}\,\Gamma_{(i)}}{\Gamma_{(\mu_1+1)} \cdot \Gamma_{(\mu_2+1)} \cdots} \cdot \Delta.$$

Nach den hier aufgestellten Formeln für die symmetrischen Functionen ist es nun möglich, sämmtliche Glieder der Gleichung 2) zu berechnen. Man wird sich bei der Aufstellung dieser Gleichung von vornherein auf die nicht verschwindenden Glieder beschränken, bildet also sämmtliche Gruppen der Zähler der Exponenten der Reihenentwicklung, deren Summen durch Δ theilbar sind, wobei zu einer Gruppe höchstens Δ Exponenten verwendet werden dürfen, jeder Exponent aber beliebig oft wiederholt werden darf. Ist z. B. die Summe der Zähler $\alpha_r + \alpha_s + \cdots \alpha_v$ von m Exponenten durch Δ theilbar, so heisst ein Glied des Productes:

$$(-1)^m a_r a_s \ldots a_v y^{\Delta - m} x^{\frac{\alpha_r + \alpha_s + \ldots \alpha_v}{\Delta}} \Sigma w_1^{\alpha_r} w_2^{\alpha_s} \ldots w_m^{\alpha_v}.$$

Das Aufsuchen der Gruppen von Exponenten, bei welchem die Summe der Zähler durch Δ theilbar ist, wird endlich noch wesentlich erleichtert, wenn statt der Zähler der Exponenten die Moduln derselben nach der Zahl Δ genommen werden, und für diese letzteren diejenigen Gruppen gebildet werden, welche durch Δ theilbar sind, weil dann die numerischen Rechnungen mit kleineren Zahlen ausgeführt werden können.

Beispiel: Die Reihenentwicklung

$$y = a x^{\frac{4}{3}} + b x^{\frac{11}{6}}$$

soll in rationale Form übergeführt werden. Das cyklische System der sechs conjugirten Gleichungen heisst:

$$y - a w_n^8 x^{\frac{8}{6}} - b w_n^{11} x^{\frac{11}{6}} = 0,$$

wo $n = 1, 2 \ldots 6$. Die Moduln von 8 und 11 nach der Zahl 6 sind 2 und 5. Es sind die Combinationen der Zahlen 2 und 5, die durch 6 theilbar sind, folgende:

$$3.2;\quad 6.2;\quad 6.5;\quad 1.2+2.5;\quad 2.2+4.5;\quad 4.2+2.5.$$

Die entsprechenden Combinationen der Zahlen 8 und 11 heissen dann

$$3.8;\quad 6.8;\quad 6.11;\quad 1.8+2.11;\quad 2.8+4.11;\quad 4.8+2.11,$$

und die rationale Form hat folgende Glieder:

$$y^6 + (-1)^3 a^3 y^3 x^{\frac{3.8}{6}} \Sigma w_1^8 w_2^8 w_3^8 + (-1)^3 a b^2 y^3 x^{\frac{8+2.11}{6}} \Sigma w_1^8 w_2^{11} w_3^{11}$$
$$+ (-1)^6 a^6 x^{\frac{6.8}{6}} \Sigma w_1^8 \ldots w_6^8 + (-1)^6 b^6 x^{\frac{6.11}{6}} \Sigma w_1^{11} \ldots w_6^{11}$$
$$+ (-1)^6 a^2 b^4 x^{\frac{2.8+4.11}{6}} \Sigma w_1^8 w_2^8 w_3^{11} \ldots w_6^{11}$$
$$+ (-1)^6 a^4 b^2 x^{\frac{4.8+2.11}{6}} \Sigma w_1^8 \ldots w_4^8 w_5^{11} w_6^{11} = 0.$$

Nach Formel 4) erhält man:

$$\Sigma w_1^8 w_2^8 w_3^8 = \frac{(-1)^2 2!}{3!} 6 = 2.$$

Ebenso

$$\Sigma w_1^8 w_2^{11} w_3^{11} = 6; \quad \Sigma w_1^{11} \ldots w_6^{11} = -1.$$

Zur Berechnung von $\Sigma w_1^8 w_2^8 w_3^{11} \ldots w_6^{11}$ hat man zuerst zu bestimmen, auf wieviel Arten die Exponenten in Gruppen angeordnet werden können, deren Summen durch 6 theilbar sind. Es sind die Exponenten so zu behandeln, wie wenn sie verschieden wären, und sie sollen deshalb durch Indices unterschieden werden. Die Summe $8_1 + 8_2 + 11_1 + 11_2 + 11_3 + 11_4$ lässt sich dann in folgende Summe spalten, die je wieder durch 6 theilbar sind:

1) $\quad 8_1 + 8_2 + 11_1 + 11_2 + 11_3 + 11_4,$

d. h. $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_5 = 0; \quad \lambda_6 = 1;$

Anzahl der Permutationen $A = 1$.

2) $\quad 8_1 + 11_1 + 11_2 \quad$ und $\quad 8_2 + 11_3 + 11_4,$

d. h. $\quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = 2; \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0;$

Anzahl der Permutationen $A = 6$; denn es existiren noch folgende Zusammenstellungen:

$$8_1 + 11_1 + 11_3 \quad \text{und} \quad 8_2 + 11_2 + 11_4$$
$$8_1 + 11_1 + 11_4 \quad \text{und} \quad 8_2 + 11_2 + 11_3$$

und noch drei weitere durch Vertauschung von 8_1 und 8_2.

Die Formel 3) giebt also, wenn noch berücksichtigt wird, dass der Exponent 8 zweimal, der Exponent 11 viermal vorkommt:

$$\Sigma w_1^{\,8} w_2^{\,8} w_3^{\,11} \ldots w_6^{\,11} = \frac{(-1)^{6-1} \Gamma^1_{(6)} . 6 + 6 (-1)^{6-2} \Gamma^2_{(3)} . 6^2}{1.2 \,.\, 1.2.3.4} = 3.$$

Etwas einfacher lässt sich diese Function auch noch auf folgende Weise berechnen:

$$\Sigma w_1^{\,8} w_2^{\,8} w_3^{\,11} \ldots w_6^{\,11} = (w_1 \ldots w_6)^8 \, \Sigma w_1^{\,3} \ldots w_4^{\,3} = \Sigma w_1^{\,3} \ldots w_4^{\,3} = 3.$$

In analoger Weise erhält man·

$$\Sigma w_1^{\,8} \ldots w_6^{\,8} = 1; \quad \Sigma w_1^{\,8} \ldots w_4^{\,8} w_5^{\,11} w_6^{\,11} = -3.$$

Die rationale Form der Reihenentwicklung wird demnach:

$$y^6 - 2a^3 y^3 x^4 - 6ab^2 y^3 x^5 + a^6 x^8 - b^6 x^{11} + 3a^2 b^4 x^{10} - 3a^4 b^2 x^9 = 0.$$

§ 2.

Eigenschaften der einer Reihenentwicklung entsprechenden rationalen Form.

Die Reihenentwicklung

$$y = a_1 x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} + a_2 x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} + \cdots$$

sei nach der vorhin angegebenen Methode in rationale Form übergeführt, und es sollen nunmehr solche Eigenschaften der letzteren gesucht werden, die aus den Beziehungen der Grössen $\Delta, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ zu einander abgelesen werden können.

Es werde vorerst angenommen, α_1 und Δ haben den gemeinschaftlichen Factor Δ_1; dagegen sollen α_2 und Δ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Setzt man daher:

$$\frac{\alpha_1}{\Delta} = \frac{\Delta_1 \beta_1}{\Delta_1 \Delta'} = \frac{\beta_1}{\Delta'},$$

so ist nach der früheren Annahme $\beta_1 > \Delta'$ oder $\beta_1 = \Delta' = 1$, ferner $\beta_1 \Delta_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots$, und die Δ conjugirten Gleichungen des cyklischen Systems, die mit einander zu multipliciren sind, um den rationalen Ausdruck zu erhalten, sind dargestellt durch:

$$5) \qquad y - a_1 w_n^{\Delta_1 \beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - a_2 w_n^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} - \ldots = 0,$$

wo $n = 1, 2, \ldots \Delta$ und wo $w_1, w_2, \ldots w_\Delta$ die Wurzeln der Gleichung $w^\Delta - 1 = 0$ sind. Die Glieder des Products, die blos je von den zwei ersten Gliedern der Gleichungen 5) herrühren, lassen sich zu einer Δ_1^{ten} Potenz zusammenfassen; denn wir können zeigen, dass von den Δ Factoren dieses Products:

6) $$\prod_{n=1}^{n=\Delta}\left(y - a_1 w_n^{J_1\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)$$

je Δ_1 einander gleich sind. Ist w eine primitive Wurzel der Gleichung $w^{\Delta} - 1 = 0$, so lassen sich die Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_{\Delta}$ darstellen durch:

$$w^1, w^2 \ldots w^{\Delta},$$

und die Potenzen

$$w_1^{\Delta_1\beta_1}, w_2^{\Delta_1\beta_1}, \ldots w_{\Delta}^{\Delta_1\beta_1}$$

werden also

$$w^{1\cdot\Delta_1\beta_1}, w^{2\cdot\Delta_1\beta_1}, \ldots w^{\Delta\cdot\Delta_1\beta_1}.$$

Die Exponenten dieser Δ Potenzen lassen sich, da $\Delta = \Delta_1\Delta'$, in folgende Δ_1 Reihen zusammenstellen:

$$\begin{aligned}
&\beta_1.\Delta_1, \quad \beta_1.2\Delta_1, \quad \beta_1.3\Delta_1, \ldots \beta_1.\Delta'\Delta_1\\
&\beta_1(\Delta_1 + \Delta'\Delta_1), \quad \beta_1(2\Delta_1 + \Delta'\Delta_1), \ldots \beta_1.2\Delta'\Delta_1\\
&\beta_1(\Delta_1 + 2\Delta'\Delta_1), \quad \beta_1(2\Delta_1 + 2\Delta'\Delta_1), \ldots \beta_1.3\Delta'\Delta_1\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\beta_1(\Delta_1 + [\Delta_1 - 1]\Delta'\Delta_1), \quad \beta_1(2\Delta_1 + [\Delta_1 - 1]\Delta'\Delta_1) \ldots \beta_1.\Delta_1\Delta'\Delta_1.
\end{aligned}$$

Da aber

$$w^{\Delta'\Delta_1} = w^{\Delta} = 1, \quad w^{m\cdot\Delta'\Delta_1} = 1,$$

so folgt, dass die Reihen von Potenzen, welche obigen Δ_1 Reihen von Exponenten entsprechen, einander gleich sind und folgendermassen lauten:

$$w^{\beta_1\Delta_1}, \quad w^{2\beta_1\Delta_1}, \ldots w^{\Delta'\beta_1\Delta_1}$$

und dass in dem Product 6) je Δ_1 Factoren einander gleich sind. Dieses Product wird dann:

$$\left\{\left(y - a_1 w^{\beta_1\Delta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)\left(y - a_1 w^{2\beta_1\Delta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)\ldots\left(y - a_1 w^{\Delta'\beta_1\Delta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)\right\}^{\Delta_1}.$$

Da w eine primitive Wurzel der Gleichung $w^{\Delta} - 1 = 0$, so ist w^{Δ_1} eine primitive Wurzel der Gleichung $w^{\Delta'} - 1 = 0$, weil $\Delta = \Delta'\Delta_1$, und es sind also

$$w^{1\cdot\Delta_1}, \quad w^{2\cdot\Delta_1}, \ldots w^{\Delta'\Delta_1}$$

die Wurzeln der Gleichung $x^{\Delta'} - 1 = 0$. Bezeichnet man diese mit

$$v_1, v_2, \ldots v_{\Delta'},$$

so nimmt obiges Product die Form an:

$$\left\{\left(y - a_1 v_1^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)\left(y - a_1 v_2^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)\ldots\left(y - a_1 v_{\Delta'}^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right)\right\}^{\Delta_1},$$

und der in der Klammer $\{\ldots\}$ stehende Ausdruck ist der der Reihenentwicklung

$$y - a_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} = 0$$

entsprechende rationale Ausdruck, also

$$y^{\Delta'} - a_1^{\Delta'} x^{\beta_1};$$

das Product 6) wird demnach $(y^{\Delta'} - a_1^{\Delta'} x^{\beta_1})^{\Delta_1}$, und das Product der conjugirten Gleichungen 5) muss also die Form haben:

7) $$(y^{\Delta'} - a_1 x^{\beta_1})^{\Delta_1} + \psi(xy) = 0,$$

wo jedes Glied von $\psi(xy)$ wesentlich abhängig ist von den Gliedern mit den Exponenten $\frac{\alpha_2}{\Delta}, \frac{\alpha_3}{\Delta}, \cdots$ Der Grad der Function $\psi(xy)$ in y kann nicht bis zu Δ ansteigen; denn die rationale Form der Reihenentwicklung enthält blos ein Glied mit y^{Δ}, die anderen sind von niederem Grad in y; der Grad von $\psi(xy)$ in x ist davon abhängig, wieviel Glieder der Reihenentwicklung beim Rationalmachen berücksichtigt wurden. Hat das letzte Glied der Reihenentwicklung den Exponenten $\frac{\alpha_n}{\Delta}$, so ist der Grad von $\psi(xy)$ in x gleich α_n; denn die höchste Potenz in x wird erhalten, wenn in den Gleichungen 5) je die letzten Glieder mit einander multiplicirt werden. Endlich tritt in $\psi(xy)$ eine Potenz von x als Factor heraus, da es blos das einzige Glied y^{Δ} geben kann, welches kein x enthält.

Es werde nun angenommen, dass auch bei den Exponenten

$$\frac{\alpha_2}{\Delta}, \frac{\alpha_3}{\Delta}, \cdots \frac{\alpha_m}{\Delta}$$

Zähler und Nenner alle den gemeinschaftlichen Factor Δ_1 haben, und in der einfachsten Form sollen diese Exponenten sein:

$$\frac{\beta_2}{\Delta'}, \frac{\beta_3}{\Delta'}, \cdots \frac{\beta_m}{\Delta'}.$$

Aus dem Product der Δ conjugirten Gleichungen 5) scheiden wir wie vorhin einen Theil ab, indem wir mit dem Glied $a_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}}$ abbrechen und folgendes Product betrachten:

$$\prod_{n=1}^{n=\Delta}\left(y - b_1 w_n^{\beta_1 \Delta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \cdots - b_m w_n^{\beta_m \Delta_1} x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}}\right),$$

wobei wir $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots a_m = b_m$ setzen.

Nach dem Vorgang von früher lässt sich nun leicht einsehen, dass jede der Reihen

$$\begin{array}{l} w_1^{\beta_1 \Delta_1}, \quad w_2^{\beta_1 \Delta_1} \ldots w_{\Delta}^{\beta_1 \Delta_1} \\ w_1^{\beta_2 \Delta_1}, \quad w_2^{\beta_2 \Delta_1} \ldots w_{\Delta}^{\beta_2 \Delta_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_1^{\beta_m \Delta_1}, \quad w_2^{\beta_m \Delta_1} \ldots w_{\Delta}^{\beta_m \Delta_1} \end{array}$$

in Δ_1 gleiche Reihen getheilt werden kann, und wir folgern daraus, dass in dem obigen Product je Δ_1 Factoren einander gleich sind. Dieses Product hat dann die Form:

$$\left\{\prod_{n=1}^{n=\Delta'}\left(y - b_1 v_n^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \cdots - b_m v_n^{\beta_m} x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}}\right)\right\}^{\Delta_1},$$

wo v_1, $v_2 \ldots v_{\Delta'}$ die Wurzeln der Gleichung $v^{\Delta'} - 1 = 0$ sind. Der Ausdruck in der Klammer $\{\ldots\}$ ist die rationale Form der abgebrochenen Reihe:

7a) $$y - b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \cdots - b_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}} = 0.$$

Obige ganze rationale Function werde bezeichnet mit

$$y^{\Delta'} + f_1(xy),$$

wo der Grad von $f_1(xy)$ in Bezug auf y kleiner sein muss als Δ', in Bezug auf x gleich β_m ist, und wo bei der Function $f_1(xy)$ eine Potenz von x als Factor heraustritt. Die rationale Form der ganzen Reihenentwicklung ist also:

8) $$[y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta_1} + \psi_1(xy) = 0,$$

wo über $\psi_1(xy)$ Analoges zu sagen ist wie über $\psi(xy)$. Die Function $y^{\Delta'} + f_1(xy)$ liefert umgekehrt die abbrechende Reihenentwicklung 7a).

Bei den auf den Exponenten $\frac{\beta_m}{\Delta'}$ folgenden Exponenten

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\Delta}, \quad \frac{\alpha_{m+2}}{\Delta}, \ldots \frac{\alpha_{m+n}}{\Delta}$$

sollen je Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor Δ_2 haben, wo Δ_2 Factor von Δ_1. Wir setzen

$$\Delta_1 = \Delta'' \Delta_2, \quad \text{also} \quad \Delta = \Delta' \Delta'' \Delta_2$$

und

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\Delta} = \frac{\gamma_1 \Delta_2}{\Delta' \Delta'' \Delta_2} = \frac{\gamma_1}{\Delta' \Delta''}$$

$$\frac{\alpha_{m+2}}{\Delta} = \frac{\gamma_2 \Delta_2}{\Delta' \Delta'' \Delta_2} = \frac{\gamma_2}{\Delta' \Delta''}$$

. . . . . .

$$\frac{\alpha_{m+n}}{\Delta} = \frac{\gamma_n \Delta_2}{\Delta' \Delta'' \Delta_2} = \frac{\gamma_n}{\Delta' \Delta''}$$

und bezeichnen die Coefficienten der Potenzen mit diesen Exponenten mit $c_1, c_2 \ldots c_n$, so dass die Reihenentwicklung von der Form ist:

9) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}} + c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta' \Delta''}} + \cdots c_n x^{\frac{\gamma_n}{\Delta' \Delta''}} + a_{m+n+1} x^{\frac{\alpha_{m+n+1}}{\Delta}} + \cdots$$

Da nun bei sämmtlichen Exponenten bis $\frac{\gamma_n}{\Delta' \Delta''}$ einschliesslich je Zähler und Nenner den Factor Δ_2 gemeinschaftlich haben, so kann aus der rationalen Form der Reihenentwicklung 9) eine Δ_2^{te} Potenz abgeschieden werden, deren Grundzahl die rationale Form der Reihenentwicklung 9)

bis zum Glied mit dem Exponenten $\frac{\gamma_n}{\Delta'\Delta''}$ einschliesslich ist; diese Form ist aber nach Vorhergehendem

$$[y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta''} + f_2(xy),$$

wo der Grad von $f_2(xy)$ in y niedriger ist als $\Delta'\Delta''$, der Grad in x gleich γ_n ist. Bricht man also die Reihe 9) bei irgend einem Gliede mit dem Exponenten $\frac{\alpha_r}{\Delta}$ ab, so lautet die rationale Form der Reihenentwicklung:

$$\{[y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta''} + f_2(xy)\}^{\Delta_2} + \varphi_2(xy) = 0,$$

wo $\varphi_2(xy)$ vom Grad α_r in x.

Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man zu folgender Verallgemeinerung: Eine Reihenentwicklung sei von der Form:

$$10)\quad \left\{ \begin{aligned} y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}} + c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}} + \cdots c_n x^{\frac{\gamma_n}{\Delta'\Delta''}} + d_1 x^{\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''}} + \cdots \\ + m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}} + m_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots \end{aligned} \right.$$

wo $\Delta = \Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}$.

Nach der Bezeichnung von Smith (a. a. O.) nennen wir kritische Exponenten diejenigen Exponenten, bei welchen zum ersten Mal im Nenner ein neuer Factor auftritt, so dass also in obiger Reihe

$$\frac{\beta_1}{\Delta'},\ \frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''},\ \ldots \frac{\mu_1}{\Delta}$$

die kritischen Exponenten sind. Bricht man die Reihe 10) bei irgend einem Glied $m_t x^{\frac{\mu_t}{\Delta}}$ ab, so liefert die Multiplication der Δ conjugirten Gleichungen, welche aus der auf Null gebrachten Gleichung 10) erhalten werden, folgende rationale ganze Function in x und y:

$$11)\quad \{([y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta''} + f_2(xy))^{\Delta'''} + \cdots f_{r-1}(xy)\}^{\Delta^{(r)}} + f_r(xy) = 0.$$

Die Functionen $f_1(xy)$, $f_2(xy), \ldots f_r(xy)$ haben sämmtlich ganze Potenzen von x als Factoren, sie sind in x resp. von den Graden β_m, $\gamma_n, \ldots \mu_t$; ihre Grade in y sind niedriger als resp. Δ', $\Delta'\Delta''$, $\ldots (\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)})$. Die Klammerausdrücke sind so beschaffen, dass sie je für y abbrechende Reihenentwicklungen geben, welche aus 10) erhalten werden, wenn diese Reihen je vor den Gliedern mit den kritischen Exponenten abgebrochen werden.

Beispiel. Die früher (§ 1) entwickelte rationale Form der Reihenentwicklung

$$y = a x^{\frac{4}{3}} + b x^{\frac{11}{6}}$$

lässt sich in folgender Weise schreiben:

$$(y^3 - a^3 x^4)^2 - 6 a b^2 y^3 x^5 - 3 a^4 b^2 x^9 + 3 a^2 b^4 x^{10} - b^6 x^{11} = 0.$$

§ 3.

Zur Cramer'schen Methode der Reihenentwicklung algebraischer Functionen einer Variabeln.

Zum Zwecke der näheren Untersuchung der Eigenschaften der Functionen $f_1(xy)$, $f_2(xy)$ ... des Ausdruckes 11) wollen wir nunmehr umgekehrt diesen rationalen Ausdruck wieder in Potenzreihen nach gebrochenen Potenzen von x entwickeln. Hierzu wenden wir eine Methode an, welche im Wesentlichen von Cramer herrührt.* Diese Methode beruht auf einer fortgesetzten Anwendung des Newton'schen Parallelogramms. Dabei werden die sämmtlichen Parallelogramme, die zur gliedweisen Berechnung der Reihe in x nothwendig sind, mit ihren Achsen auf einander gelegt. Es mögen die Glieder der gegebenen rationalen Gleichung $f(xy) = 0$ in das Newton'sche Parallelogramm eingetragen werden, d. h. irgend ein Glied $Mx^m y^n$ wird graphisch dargestellt in einem Coordinatensystem XY durch einen Punkt mit den Coordinaten m und n; dann werden die dem Ursprung zunächst gelegenen Punkte derart durch gerade Linien verbunden, dass sämmtliche Punkte des Parallelogramms auf der Seite einer jeden Geraden liegen, auf welcher der Ursprung nicht liegt. Wir bezeichnen in Folgendem eine solche Gerade als Gerade niederster Dimension; sämmtliche Gerade dieser Art bilden einen gebrochenen Zug. Die Glieder von $f(xy)$, die auf einer Geraden dieses Zugs liegen, liefern die Anfangsglieder von einem oder mehreren cyklischen Systemen von Reihenentwicklungen.**

Sei AB eine Gerade niederster Dimension (Fig. 1), und geben die Glieder dieser Geraden, deren Aggregat gleich Null gesetzt wurde, das Anfangsglied der Entwicklung

$$y = ax^n,$$

wo n ganz oder gebrochen, so wird der Neigungswinkel α von AB gegen die X-Achse ausgedrückt durch:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{n}.$$

Um das nächste Glied der Entwicklung zu erhalten, setze man

$$y = u + ax^n$$

in $f(xy) = 0$ ein und erhält eine Function in u und x, deren Glieder wieder in ein Newton'sches Parallelogramm eingetragen werden, dessen X-Achse mit der X-Achse und dessen U-Achse mit der Y-Achse des vorigen Parallelogramms zusammenfallen. Irgend ein Glied $Mx^r y^s$ von

---

* Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes. 1750.

** Vergl. Puiseux a. a. O.

$f(xy)$, das dem Punkte P_1 des Parallelogramms entspricht, transformirt sich in die Glieder:

$$Mx^r(u + ax^n)^s = Mx^r u^s + Ma.\binom{r}{1}x^{r+n}.u^{s-1} + \cdots Ma^s x^{r+sn}.$$

Diese Glieder liegen auf den Schnittpunkten der Parallelen $P_1 D$ zu AB mit den Parallelen zur X-Achse in den Abständen $s, s-1, \ldots 1, 0$. Die Coefficienten können leicht bestimmt werden. Transformirt man derart insbesondere die Glieder auf der Geraden niederster Dimension AB, so hat Cramer gezeigt, dass, wenn diese Glieder niederster Dimension $y - ax^n$ als p-fachen Factor haben, die transformirten Glieder auf die Schnittpunkte fallen von AB mit den Parallelen zur Achse im Abstand $p, p+1, \ldots$, bis zur Parallelen, die durch A geht.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Glieder von AB $y - ax^n$ als einfachen Factor enthalten. Dann entspricht das transformirte Glied mit der niedersten Potenz von u dem Punkte C, dem Schnittpunkt der Parallelen im Abstand 1 zur X-Achse mit AB. Sind nun $B_1, D, E, F \ldots$ die Schnittpunkte der X-Achse mit den Parallelen zu AB durch die sämmtlichen Punkte des ersten Newton'schen Parallelogramms, so setzt sich nach Cramer die Reihenentwicklung fort nach Potenzen von x^h, wo h das grösste gemeinschaftliche Vielfache der Maasszahlen der Strecken $B_1 D, B_1 E, B_1 F \ldots$ ist; die Zahl h hat den gleichen Nenner wie n, oder sie hat blos Factoren desselben als Nenner.

Dasselbe Resultat ergiebt eine andere von Newton angegebene und von Mac Laurin weiter ausgeführte Methode der Reihenentwicklung.* Die auf algebraischem Wege mit Hilfe der Descartes'schen Coefficientenvergleichung abgeleitete Regel lautet dort folgendermassen: Sei Ax^l das Glied mit dem niedersten Exponenten in x allein, die übrigen Glieder seien von der Form $By^k x^e$, so suche man denjenigen Werth $n = \frac{l-e}{k}$, welcher der grösste ist. Das Eintragen der Glieder in das Newton'sche Parallelogramm zeigt, da $\frac{1}{n} = tg\,\alpha$, dass die Verbindungslinie der den Gliedern $y^k x^e$ und x^l entsprechenden Punkte eine Seite des Zugs niederster Dimension ist, wenn n seinen grössten, d. h. α seinen kleinsten Werth erreicht. Nun bildet Mac Laurin, wenn die Glieder der Function $Ax^l, By^h x^e, Cy^s x^m, Dy^k x^f \ldots$ sind, die Differenzen der Grössen $e + nh$, $m + ns$, $f + nk \ldots$ und findet r als das grösste gemeinschaftliche Vielfache dieser Differenzen. Die Reihe hat dann die Form:

$$y = ax^n + bx^{n+r} + cx^{n+2r} + \cdots$$

Bedenkt man, dass die Grössen $e + nh$, $m + ns$, $f + nk \ldots$ nichts Anderes sind als die Entfernungen des Ursprungs von den Schnittpunkten

* Mac Laurin, A treatise on Algebra, Ch. X.

der X-Achse mit den Parallelen zur Geraden niederster Dimension durch die Punkte des ersten Parallelogramms, so leuchtet die Uebereinstimmung der Cramer'schen Regel mit der Mac Laurin's unmittelbar ein.

Es erübrigt noch, die von Puiseux angegebene Regel aus der eben dargelegten Methode von Cramer abzuleiten. Es sei das Anfangsglied der Entwicklung $ax^n = ax^{\frac{\delta}{\Delta}}$, wo δ und Δ ganze Zahlen sind, und sei irgend ein Glied auf der Geraden niederster Dimension AB (Fig. 1) von der Form $x^p y^q$, so ist, wenn B_1 der Schnitt von AB mit der X-Achse:

$$OB_1 = p + \frac{\delta}{\Delta} \cdot q \ldots$$

Die Parallele mit AB durch den irgend einem anderen Glied $x^r y^s$ entsprechenden Punkt P_1 schneide die X-Achse in D, so ist

$$OD = r + \frac{\delta}{\Delta} \cdot s,$$

woraus $OD - OB_1 = r - p + (s - q) \cdot \frac{\delta}{\Delta}$. Sämmtliche Differenzen dieser Form haben jedenfalls $\frac{1}{\Delta}$ als gemeinschaftliches Vielfaches; es setzt sich also die Reihe fort nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta}}$, wie Puiseux angiebt. Möglicherweise aber steigt die Entwicklung an nach Potenzen, deren Exponenten Vielfache von $\frac{1}{\Delta}$ sind (nämlich das grösste gemeinschaftliche Vielfache oben besagter Differenzen), was nur nach der Cramer'schen Regel erhalten werden kann.

Ist das Anfangsglied einer Entwicklung $y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}$, und liefern die Glieder niederster Dimension auf AB (Fig. 1) dasselbe als Δ_1-fachen Factor, so gehen diese Glieder bei der Transformation

$$y = u_1 + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}$$

über in Glieder in x und u_1, die so beschaffen sind, dass das Glied mit der niedersten Potenz in u_1 auf Punkt A' der Geraden AB kommt, wobei Δ_1 Ordinate von A' ist. Die Gerade niederster Dimension in u und x geht jedenfalls von A' aus; enthalten die Glieder dieser Geraden keinen mehrfachen Factor, und ist das grösste gemeinschaftliche Vielfache der Strecken $B_1 D$, $B_1 E$, $B_1 F$ von der Form $\frac{\varepsilon}{\Delta'}$, wo ε und Δ' ganze Zahlen, so kann man unschwer analog den Untersuchungen Cramer's finden, dass die Reihenentwicklung fortschreitet nach Potenzen von $x^{\frac{\varepsilon}{\Delta' \Delta_1}}$. Auch in diesem Falle findet Uebereinstimmung statt mit der Methode Mac Laurin's.

Der allgemeine Fall jedoch, zu dem wir jetzt übergehen, lässt sich nach der Methode von Mac Laurin nicht behandeln.

Es mögen auch die Glieder niederster Dimension in u_1 und x einen Δ_1-fachen Factor haben. Diese Glieder müssen von der Form sein:

$$P.\left(u_1 - b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}\right)^{\Delta_1},$$

wo P eine Potenz in x, multiplicirt mit einer Constanten, bedeutet. Die entsprechende Gerade muss von A' ausgehen; sie sei $A'B_2$ (Fig. 2). Das zweite Glied der Reihenentwicklung heisst dann $b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}$. Man setzt dann weiter

$$u_1 = u_2 + b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}$$

und bestimmt wiederum die Gerade niederster Dimension, so geht diese wieder von A' aus nach einem Punkte B_3, wenn die Glieder sich nochmals zu einer Δ_1^{ten} Potenz zusammenfassen lassen, etc. Solange die Glieder niederster Dimension Δ_1^{te} Potenzen sind, haben die Potenzexponenten der Reihenentwicklung den Nenner Δ' und die Geraden niederster Dimension gehen von A' aus.

Lassen sich bei den auf einander folgenden Transformationen die Glieder niederster Dimension zum ersten Mal nicht mehr zu einer Δ_1^{ten} Potenz, sondern nur zu einer Δ_2^{ten} Potenz zusammenfassen, wo $\Delta_1 = \Delta''.\Delta_2$, so müssen diese Glieder von der Form sein:

$$P.\left(v_1^{\Delta''} - c_1^{\Delta''} x^{\frac{\gamma_1}{\Delta}}\right)^{\Delta_2};$$

sie liegen auf der Geraden $A'C_1$ und geben das Glied $c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}}$ der Reihenentwicklung, wo also $\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$ kritischer Exponent ist. Geben bei einer Anzahl der folgenden Transformationen die Glieder niederster Dimension wiederum Δ_2^{te} Potenzen, so sind die entsprechenden Geraden $A''C_2$, $A''C_3 \ldots$, wobei A'' auf $A'C_1$ liegt und die Ordinate Δ_2 hat; die entsprechenden Glieder der Reihenentwicklung haben $\Delta'\Delta''$ als Nenner der Potenzexponenten. Der nächste kritische Exponent $\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''}$ entspreche der Geraden $A''D_1$, so entsprechen die diesem Exponenten folgenden nicht kritischen Exponenten Geraden von A''' aus, wo A''' auf $A''D_1$ liegt und die Ordinate Δ_3 hat, wobei $\Delta = \Delta'\Delta''\Delta'''.\Delta_3$ etc. Die Gerade, die dem letzten kritischen Exponenten $\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}$ entspricht, sei $A^{(r-1)}M_1$, wobei die Ordinate von $A^{(r-1)}$ gleich $\Delta^{(r)} = \Delta_{r-1}$. Die Glieder niederster Dimension lassen sich nun zu keiner Potenz mehr zusammenfassen; sie sind von der Form:

$$R\left[z_1^{\Delta^{(r)}} - m_1^{\Delta^{(r)}} x^{\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}}\right].$$

Zieht man durch sämmtliche Punkte, die der transformirten Function in z_1 und x entsprechen, Parallelen zu $A^{(r-1)}M_1$, und ist das grösste ge-

meinschaftliche Vielfache der Entfernungen des Punktes M_1 von den Schnittpunkten dieser Parallelen mit der X-Achse gleich h, so geht die Reihenentwicklung von jetzt ab weiter nach Potenzen von x^h; h ist entweder $\frac{1}{\Delta' \Delta'' \dots \Delta^{(r)}}$ oder ein Vielfaches dieser Grösse. Bei den jetzt folgenden Transformationen, die nöthig sind, um die Glieder hinter dem letzten kritischen Exponenten zu berechnen, gehen die Geraden niederster Dimension alle von $A^{(r)}$ aus, wobei $A^{(r)}$ die Ordinate 1 hat und auf $A^{(r-1)} M_1$ liegt.

Hat man eine Function von der Form 11) in eine Reihe zu entwickeln, die ein cyklisches System von der Form 10) liefert, so liegen die Endpunkte A und B der Geraden niederster Dimension der Function in x und y auf den beiden Achsen, und zwar ist $OA = \Delta = \Delta' \Delta'' \dots \Delta^{(r)}$. Da nun die Richtung irgend einer Geraden niederster Dimension dadurch bestimmt ist, dass die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels gegen die X-Achse gleich dem reciproken Werth des Exponenten der Potenz in x ist, die sich aus dieser Geraden ergiebt, so ist die Lage sämmtlicher Geraden niederster Dimension durch die Potenzexponenten bestimmt. Beachtet man zugleich, dass die Geraden, welche kritische Exponenten ergeben, die letzten sind, die von den Punkten $A', A'' \dots A^{(r-1)}$ ausgehen, so folgt, dass diese Geraden durch die kritischen Exponenten allein bestimmt sind.

Insbesondere ergiebt sich für die Coordinaten ξ, η von $A^{(r)}$:

$$\xi = (\Delta - \Delta_1) \frac{\beta_1}{\Delta'} + (\Delta_1 - \Delta_2) \cdot \frac{\gamma_1}{\Delta' \Delta''} + (\Delta_2 - \Delta_3) \frac{\delta_1}{\Delta' \Delta'' \Delta'''} + \cdots$$

$$+ (\Delta_{r-1} - 1) \frac{\mu_1}{\Delta' \Delta'' \dots \Delta^{(r)}} \quad \text{und} \quad \eta = 1,$$

wobei Δ_p definirt ist durch die Gleichung:

$$\Delta = \Delta' \Delta'' \Delta''' \dots \Delta^{(p)} . \Delta_p;$$

ferner ist:

12) $$OM_1 = \xi + \frac{\mu_1}{\Delta}.$$

Die Zahl ξ steht in Beziehung zu der Zahl, die Smith (a. a. O.) den Discriminantenindex nennt. Es ist nämlich:

13) $$\xi = \frac{2N}{\Delta},$$

da Smith nach unserer Bezeichnungsweise setzt:

14) $$\begin{cases} 2N = (\Delta - \Delta_1) \beta_1 \Delta_1 + (\Delta_1 - \Delta_2) \gamma_1 \Delta_2 + (\Delta_2 - \Delta_3) \delta_1 \Delta_3 + \cdots \\ \qquad + (\Delta_{r-1} - 1) \mu_1 . \end{cases}$$

§ 4.

Die allgemeine rationale Form eines superlinearen Zweiges mit gegebenen kritischen Exponenten.

Wir gehen aus von dem superlinearen Zweig, der durch die Reihenentwicklung 10) definirt ist; durch Rationalmachen dieser Reihenentwicklung erhält man den Ausdruck 11). Bezeichnet man irgend einen Klammerausdruck von 11) mit

15) $$[F_{q-1}(xy)]^{\Delta^{(q)}} + f_q(xy),$$

der selbst wieder von der Form 11) ist, so hat dieser Ausdruck die Eigenschaft, eine abbrechende Reihenentwicklung zu ergeben, welche man erhält, wenn man die Reihenentwicklung 10) mit dem Glied $k_n x^{\frac{\varkappa_n}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q)}}}$, dem letzten Glied vor dem Glied mit dem kritischen Exponenten mit Nenner $\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q+1)}$, abbricht. Nimmt man die Reihenentwicklung dieser Function 15) nach der im vorigen Paragraphen entwickelten Methode wirklich vor, so möge sich $A^{(q-1)}E_1$ als Gerade niederster Dimension ergeben, welche dem letzten kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q)}}$ entspricht. Auf dieser Geraden liegen blos zwei Glieder, nämlich eins auf $A^{(q-1)}$ und eins auf E_1. Denkt man sich $\Delta = \Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q)}$ gesetzt, so liefert eine analoge Rechnung, wie die am Schluss des § 3, für die Coordinaten von $A^{(q-1)}$ folgende Grössen:

$$\Delta''\Delta'''\dots\Delta^{(q)}(\Delta'-1)\cdot\frac{\beta_1}{\Delta'} + \Delta'''\dots\Delta^{(q)}(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''} + \cdots$$

$$+ \Delta^{(q)}\cdot(\Delta^{(q-1)}-1)\cdot\frac{\iota_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}} \quad \text{und} \quad \Delta^{(q)}$$

oder

$$\frac{Q}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}} \quad \text{und} \quad \Delta^{(q)}.$$

Die Abscisse von E_1 ist:

$$\frac{Q}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}} + \frac{\varkappa_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}} = \frac{K_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}}.$$

Nun ergiebt aber $[F_q(xy)]^{\Delta^{(q)}}$ die Reihenentwicklung 10) bis zum Glied mit Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}}$ excl. und zwar $\Delta^{(q)}$mal; die letzten Exponenten dieser Entwicklung $\frac{\iota_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}}$, $\frac{\iota_2}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}}$, $\cdots$ ergeben sich aus Geraden niederster Dimension, die von $A^{(q-1)}$ ausgehen, wobei die Glieder immer zu $\Delta^{(q)\text{ten}}$ Potenzen sich zusammenfassen lassen müssen und also von der Form sind:

$$const\ x^{\frac{Q}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}}}\left[w_r - i_r x^{\frac{\iota_r}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(q-1)}}}\right]^{\Delta^{(q)}}.$$

Das Glied in x allein hat den Potenzexponenten

$$\frac{Q + \iota_r \cdot \Delta^{(q)}}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}},$$

und kein Glied solcher Art, was auch ι_r sein mag, kann auf den Punkt E_1 fallen, dessen entsprechendes Glied den kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ ergiebt. Denn der diesem letzteren Glied zugehörige Potenzexponent ist

16) $$\frac{Q}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}} + \frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}},$$

und es müsste also $\varkappa_1 = \iota_r \cdot \Delta^{(q)}$ sein, was unmöglich ist, da $\varkappa_1$ den Factor $\Delta^{(q)}$ nicht enthalten kann.

Wir folgern daraus, dass das Glied auf E_1, eine Potenz in x mit dem Exponenten $\frac{K_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}}$, blos herrührt von der Function $f_q(xy)$, und zwar ist es die kleinste Potenz in x, die sich aus $f_q(xy)$ ergiebt, wenn y ersetzt wird durch die Reihe 10), welche man vor dem Glied mit dem kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ abgebrochen hat. Ferner schliessen wir daraus, dass man aus der Function 15) den kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ auch erhält, wenn man statt $F_{q-1}(xy)$ eine Function $\Phi_{q-1}(xy)$ wählt, deren Reihenentwicklung mit der Reihenentwicklung von $F_{q-1}(xy)$ blos in den Gliedern mit den kritischen Exponenten identisch ist, sonst aber ganz beliebig ist. Denn das transformirte Glied, das bei der Reihenentwicklung auf den Punkt $A^{(q-1)}$ fällt, ergiebt sich mit Exponenten und Coefficient aus den Gliedern der Geraden niederster Dimension, welche kritische Exponenten ergeben. Es ist also noch die Form der Function $f_q(xy)$ zu bestimmen, so dass der Ausdruck 15) als letzten kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ ergiebt, sonst aber sich beliebig nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}}$ fortsetzt.

Wir betrachten die erste Function von der Form 15):

17) $$\Phi_1(xy) \equiv y^{\Delta'} + \varphi_1(xy),$$

welche als kritischen Exponenten $\frac{\beta_1}{\Delta'}$ ergeben und sich beliebig nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta'}}$ fortsetzen soll. Es muss dann $\varphi_1(xy)$ als niederste Potenz in x das Glied x^{β_1} enthalten; die Gerade niederster Dimension AB_1 (Fig. 3) enthält also die zwei Glieder mit $y^{\Delta'}$ und x^{β_1}, wo $OA = \Delta'$; $OB_1 = \beta_1$. Alle anderen Glieder, die von der Form $x^p y^q$ sind (jedes mit beliebigem Coefficienten), liegen auf der dem Ursprung abgewendeten Seite der Geraden

niederster Dimension AB_1, so dass für p und q die Bedingungsgleichung existirt:

18) $$p + \frac{\beta_1}{\Delta'} q > \beta_1.$$

Die Reihenentwicklung von 16) hat die Form:

19) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + b_2 x^{\frac{\beta_1+1}{\Delta'}} + b_3 x^{\frac{\beta_1+2}{\Delta'}} + \cdots$$

wo $b_1, b_2, b_3 \ldots$ Functionen sind der beliebigen Coefficienten in $\varphi(xy)$.

Soll nun aber die Reihenentwicklung einer Function die Anfangsglieder mit der Reihe 19) gemeinschaftlich haben, aber einen zweiten kritischen Exponenten $\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$ besitzen, also folgende Form haben:

20) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + b_2 x^{\frac{\beta_1+1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{b_1+m-1}{\Delta'}} + c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}} + c_2 x^{\frac{\gamma_1+1}{\Delta'\Delta''}} + \cdots,$$

wo $$\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'} < \frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''} < \frac{\beta_1+m}{\Delta'},$$

so muss der entsprechende rationale Ausdruck die Gestalt haben:

21) $$\Phi_2(xy) \equiv [\Phi_1(xy)]^{\Delta''} + \varphi_2(xy),$$

wobei $\varphi_2(xy)$ so beschaffen sein muss, dass, wenn man darin

22) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'}}$$

setzt, die niederste Potenz in x den Exponenten

$$\Delta''(\Delta' - 1)\frac{\beta_1}{\Delta'} + \frac{\gamma_1}{\Delta'} = \frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$$

hat (vergl. Formel 16); denn die Gerade niederster Dimension, die bei der Entwicklung von $\Phi_2(xy)$ den kritischen Exponenten $\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$ liefert, geht nach einem Punkt der X-Achse, dessen Abscisse $= \frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$. Diese Eigenschaft bestimmt $\varphi_2(xy)$. Es kann nämlich $\varphi_2(xy)$ alle Glieder enthalten, jedes mit einem willkürlichen Coefficienten von der Form $x^p y^q$, wobei

$$p + \frac{\beta_1}{\Delta} q = \frac{\Gamma_1'}{\Delta'};$$

denn diese Glieder geben bei der ersten Transformation $y = u + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}$ Glieder in x allein mit den Exponenten $\frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$. Es sind aber noch eine Reihe von anderen Gliedern denkbar, deren Coefficienten nicht mehr alle von einander unabhängig sind, die nämlich bei irgend einer der Transformationen, welche man ausführen muss, um die Reihenentwicklung bis $b_m x^{\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'}}$ zu bekommen, als niederstes Glied in x ein solches mit Exponenten $\frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$ ergeben.

Bezeichnet man mit

$$\Phi_{1r}(xy)$$

denjenigen Theil von $\Phi_1(xy)$, der die Reihenentwicklung bis zum Glied $b_r x^{\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'}}$ bestimmt, den man also erhält, wenn man $\Phi_1(xy)$ bis zu dem eben bezeichneten Glied in eine Reihe entwickelt und diejenigen Glieder in x und y sammelt, die für diese Reihenentwicklung in Betracht kommen, so liefert $\Phi_{1r}(xy)$ eine Reihenentwicklung:

$$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_r x^{\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'}} + b'_{r+1} x^{\frac{\beta_1+r}{\Delta'}} + \cdots,$$

wo b'_{r+1} im Allgemeinen nicht mit b_{r+1} identisch sein wird, nämlich dann nicht, wenn zur Bestimmung des Gliedes mit dem Coefficienten b_{r+1} noch andere Glieder von $\Phi_1(xy)$ ausser den Gliedern $\Phi_{1r}(xy)$ beitragen. Ist $A'B_r$ die Gerade niederster Dimension, welche bei der Reihenentwicklung von $\Phi_{1r}(xy)$ das Glied mit dem Coefficienten b_r ergiebt, und transformirt man, um das nächste Glied der Reihenentwicklung zu bekommen,

wo
$$u_{r-1} = u_r + b_r x^{\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'}},$$
$$u_{r-1} = y - b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \cdots - b_{r-1} x^{\frac{\beta_1+r-2}{\Delta'}},$$

so ist $A'B_{r+1}$ die Gerade niederster Dimension und entspricht dem Ausdruck:

$$const\ x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1)} \left\{ u_r - b'_{r+1} x^{\frac{\beta_1+r}{\Delta'}} \right\}.$$

Wenn nun $b'_{r+1} \gtrless b_{r+1}$, so bekommt man, da die Abscisse OB_{r+1}

$$\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1) + \frac{\beta_1+r}{\Delta'} = \beta_1 + \frac{r}{\Delta'} = \frac{B_r}{\Delta'},$$

ein Glied mit $x^{\frac{B_r}{\Delta'}}$ als niederste Potenz in x, sofern man in $\Phi_{1r}(xy)$ y durch die Reihenentwicklung 22) ersetzt. Ist aber $b_{r+1} = b'_{r+1}$, so wird die niederste Potenz in x von höherem Grad. Man geht dann in der Entwicklung von $\Phi_{1r}(xy)$ so weit, bis ein Glied kommt, das mit der Entwicklung von $\Phi_1(xy)$ nicht übereinstimmt, und bestimmt dann auf die eben angegebene Weise die niederste Potenz. Man scheide also von $\Phi_1(xy)$ die Glieder

23) $$\Phi_{11}(xy) \ldots \Phi_{1r}(xy) \ldots \Phi_{1m}(xy)$$

ab, welche bei der Reihenentwicklung von $\Phi_1(xy)$ nothwendig sind zur Bestimmung der Exponenten

$$\frac{\beta_1}{\Delta'} \ldots \frac{\beta_1+r-1}{\Delta'} \ldots \frac{\beta_1+m-1}{\Delta'},$$

so ergeben obige Ausdrücke 23), sofern y durch die Reihenentwicklung 22) ersetzt wird, als Potenzexponenten der niedersten Potenzen in x resp.:

$$\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1)+\frac{\beta_1}{\Delta'},\cdots\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1)+\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'},\cdots\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1)+\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'},$$

oder

$$\beta_1,\cdots\beta_1+\frac{r-1}{\Delta'},\cdots\beta_1+\frac{m-1}{\Delta'},$$

oder

$$\frac{B_1}{\Delta'},\cdots\frac{B_r}{\Delta'},\cdots\frac{B_m}{\Delta'},$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Ausdrücke 23) alle verschieden sind. Sind aber mehrere einander gleich, so ist für die letzteren der Exponent zu nehmen, den obige Formel für den letzten derselben ergiebt.

Die allgemeinste Form einer Function, die als niederste Potenz in x eine solche mit dem Exponenten $\frac{\Gamma_1}{\Delta'}$ ergiebt, sofern man y durch die Reihe 22) ersetzt, ist also

24) $$\Sigma\, const\, x^p y^q [\Phi_{11}(xy)]^{r_1}.[\Phi_{12}(xy)]^{r_2}\ldots[\Phi_{1r}(xy)]^{r_m},$$

wobei die Summe über sämmtliche Formen zu erstrecken ist, für welche

25) $$p+\frac{\beta_1}{\Delta'}q+\frac{B_1}{\Delta'}r_1+\frac{B_2}{\Delta'}r_2+\cdots\frac{B_m}{\Delta'}r_m=\frac{\Gamma_1'}{\Delta'}.$$

$\varphi_2(xy)$ muss mindestens ein Glied des Ausdrucks 24) enthalten. Daneben darf es noch beliebige Glieder enthalten, für welche die linke Seite der Gleichung 25) grösser wird als die rechte.

Soll nun die Reihenentwicklung einen weiteren kritischen Exponenten $\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''}$ bekommen, so ist der vorhergehende Exponent von der Form $\frac{\gamma_1+n-1}{\Delta'\Delta''}$, wobei

$$\frac{\gamma_1+n-1}{\Delta'\Delta''}<\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''}<\frac{\gamma_1+n}{\Delta'\Delta''}.$$

Der rationale Ausdruck, der eine Reihe von dieser Form ergiebt, ist dann von der Form: $[\Phi_2(xy)]^{\Delta'''}+\varphi_3(xy)$.

Bezeichnet man mit:

$$\Phi_{21}(xy),\ \Phi_{22}(xy)\ldots\Phi_{2n}(xy)$$

diejenigen Theile von $\Phi_2(xy)$, welche zur Reihenentwicklung bis resp. zu den Gliedern mit den Exponenten

$$\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \frac{\gamma_1+1}{\Delta'\Delta''},\ldots\frac{\gamma_1+n-1}{\Delta'\Delta''}$$

beitragen, so ergeben obige Ausdrücke, sofern man y durch die Reihe

$$y=b_1x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}+b_2x^{\frac{\beta_1+1}{\Delta'}}+\cdots c_1x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}}+\cdots c_nx^{\frac{\gamma_1+n-1}{\Delta'\Delta''}}$$

ersetzt, als Potenzexponenten der niedersten Potenzen in x resp. (vergl. Formel 16):

$$\Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}+\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$$

$$+\frac{\gamma_1+1}{\Delta'\Delta''},\cdots\Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}+\frac{\gamma_1+n-1}{\Delta'\Delta''},$$

oder

$$\frac{\Gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \frac{\Gamma_2}{\Delta'\Delta''},\cdots\frac{\Gamma_n}{\Delta'\Delta''}.$$

$\varphi_3(xy)$ muss dann von der Form sein:

26) $\Sigma const\, x^p y^q [\Phi_{11}(xy)]^{r_1}\cdots[\Phi_{1r}(xy)]^{r_m}[\Phi_{21}(xy)]^{s_1}\cdots[\Phi_{2n}(xy)]^{s_n}$,

wobei

27) $p+\frac{\beta_1}{\Delta'}q+\frac{B_1}{\Delta'}r_1+\cdots\frac{B_m}{\Delta'}r_m+\frac{\Gamma_1}{\Delta'\Delta''}s_1+\frac{\Gamma_2}{\Delta'\Delta''}s_2+\cdots\frac{\Gamma_n}{\Delta'\Delta''}s_n\geqq\frac{\Delta_1'}{\Delta'\Delta''}$

und

$$\frac{\Delta_1'}{\Delta'\Delta''}=\Delta''\Delta'''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+\Delta'''(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}+\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''}.$$

Die Bedingung des Gleichseins in 27) muss von mindestens einem Glied von 26) erfüllt sein.

Fährt man in dieser Weise fort, bis sämmtliche kritische Exponenten

$$\frac{\beta_1}{\Delta'},\ \frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\cdots\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}$$

erschöpft sind, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

28) $\{([y^{\Delta'}+\varphi_1(xy)]^{\Delta''}+\varphi_2(xy))^{\Delta'''}+\cdots\varphi_{r-1}(xy)\}^{\Delta^{(r)}}+\varphi_r(xy)=0$,

wobei jede der Functionen φ auf angegebene Weise von der ihr vorhergehenden abhängig ist. Der Grad dieser Functionen in x und y darf jede beliebige Höhe erreichen; denn die Bedingungen 18), 25), 27)... können immer erfüllt werden, wenn nur die Grade in x und y hoch genug genommen werden.

Zusatz. Die Form 28) kann beliebig specialisirt werden. Man kann z B. die Forderung aufstellen, die Curvengleichung niedersten Grades zu bestimmen, die einen superlinearen Zweig mit gegebenen kritischen Exponenten besitzt. Zu diesem Zweck wird man aus den Functionen $\varphi_1(xy)$, $\varphi_2(xy)$. . von den Gliedern, die vorkommen dürfen, je blos diejenigen niedersten Grades entnehmen und die Coefficienten der anderen gleich Null setzen.

§ 5.

Verhalten der adjungirten Curve in einem singulären Punkt.*

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die allgemeine Form der Curve zu finden, die sich in einem gegebenen singulären Punkt einer algebraischen Curve adjungirt verhält, d. h., es soll die adjungirte Curve mit der grösstmöglichen Anzahl von willkürlichen Constanten gefunden werden, welche

* Vergl. Briot, Théorie des fonctions abéliennes, 1879; chap. I.

die Bedingung des Adjungirtseins in dem betreffenden Punkt noch verfügbar lässt. Zu diesem Zweck gehen wir von folgender Definition aus:

Eine Curve $\varphi(xy) = 0$ verhält sich in dem singulären Punkt $x = a$, $y = b$ der Curve $f(xy) = 0$ adjungirt zu der letzteren, wenn das Abel'sche Integral

29) $$w = \int \frac{\varphi(xy)\,dx}{f'(y)},$$

wo $f'(y) = \frac{\partial f(xy)}{\partial y}$, endlich bleibt für $x = a$, $y = b$.

Macht man den singulären Punkt zum Ursprung, so ist die Aufgabe, eine Function $\varphi(xy)$ derart zu bestimmen, dass w endlich wird für $x = 0$, $y = 0$, wenn in $f'(y)$ und $\varphi(xy)$ die abhängige Variable y ersetzt wird durch diejenigen Werthe, welche sich aus $f(xy) = 0$ bestimmen. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass sich y aus $f(xy) = 0$ bestimmen lasse durch Reihen, die nach positiven Potenzen von x aufsteigen, und betrachten von diesen nur diejenigen, die mit $x = 0$ verschwinden. Beschränken wir uns ferner vorerst auf den Fall, dass die Reihenentwicklungen von $f(xy) = 0$ blos ein einziges cyklisches System von Entwicklungen von der Form

$$y = a_1 x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} + a_2 x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} + \cdots \qquad (\Delta \leq \alpha_1 < \alpha_2 \ldots)$$

ergebe, so haben wir mit diesem Werth von y in 29) einzugehen, indem wir $\varphi(xy)$ als ganze algebraische Function annehmen, also setzen:

$$\varphi(xy) = A_0 + B_0 x + B_1 y + C_0 x^2 + C_1 xy + C_2 y^2 + \cdots$$

Ordnet man $\varphi(xy)$ und $f'(y)$ nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta}}$, so wird aus 29)

$$w = \int \frac{\left(N_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + N_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots\right) dx}{m_1 x^{\frac{\vartheta_1}{\Delta}} + m_2 x^{\frac{\vartheta_2}{\Delta}} + m_3 x^{\frac{\vartheta_3}{\Delta}} + \cdots},$$

oder, wenn

$$\left[1 + \frac{m_2}{m_1} x^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Delta}} + \frac{m_3}{m_1} x^{\frac{\vartheta_3 - \vartheta_1}{\Delta}} + \cdots\right]^{-1}$$

entwickelt wird, so erhält man die Anfangsglieder:

$$1 - \frac{m_2}{m_1} x^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Delta}} - \frac{m_3}{m_1} x^{\frac{\vartheta_3 - \vartheta_1}{\Delta}} - \cdots$$

Daher wird obiges Integral:

30) $$w = \int \frac{\left(N_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + N_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots\right)\left(1 - \frac{m_2}{m_1} x^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Delta}} - \cdots\right) dx}{m_1 x^{\frac{\vartheta_1}{\Delta}}}.$$

Dieses Integral soll endlich werden für $x = 0$, d. h., es muss der Potenzexponent eines jeden Gliedes des Zählers grösser sein als $\frac{\vartheta_1}{\Delta} - 1$. Nun ist, da

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots \quad \text{und} \quad \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3 \ldots,$$

das Glied niedersten Grades des Zählers $N_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}}$; erfüllt $\frac{\mu_1}{\Delta}$ die Bedingung nicht, so ist $N_1 = 0$ zu setzen, und es ist dann $N_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}}$ das Glied niedersten Grades, wobei $N_2 = 0$ zu setzen, wenn $\frac{\mu_2}{\Delta}$ nicht grösser als $\frac{\vartheta_1}{\Delta} - 1$. In dieser Weise ist fortzufahren, bis man zu einem Glied $N_k x^{\frac{\mu_k}{\Delta}}$ kommt, wo $\frac{\mu_k}{\Delta} > \frac{\vartheta_1}{\Delta} - 1$. Alsdann dürfen N_k und alle übrigen Coefficienten beliebig bleiben, da dann auch sämmtliche übrigen Glieder der Bedingung genügen. Das Integral 30) ist also für $x = 0$ immer und nur dann endlich, wenn

31) $$w_1 = \int \frac{\left(N_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + N_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \ldots\right) dx}{m_1 x^{\frac{\vartheta_1}{\Delta}}}$$

endlich ist. Die Bedingung, dass dieses Integral endlich ist, wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \ldots N_{k-1} = 0$$

zwischen den Coefficienten A_0, B_0, $B_1 \ldots$ der willkürlich angenommenen Function $\varphi(xy)$. $x^{\frac{\vartheta_1}{\Delta}}$ ist die niederste Potenz, die man erhält, wenn man in $f'(y)$ für y die bestimmte Reihe einsetzt.

Das Folgende wird nun zeigen, wie man diese Rechnung wesentlich abkürzen kann. Die Curve, welche einen singulären Punkt im Ursprung hat, in dem das Verhalten der adjungirten Curve bestimmt werden soll, sei gegeben durch das cyklische System von Reihenentwicklungen von der Form 10); alsdann bekommt man für die rationale Form den Ausdruck 11). Denkt man sich aus dieser rationalen Form $f'(y)$ gebildet und die Glieder in das Newton'sche Parallelogramm eingetragen, so kann man das System dieser Punkte erhalten, indem man von dem zu $f(xy)$ gehörigen Newton'schen Parallelogramm ausgeht und sämmtliche Punkte in Beziehung auf ein neues Coordinatensystem betrachtet, welches man dadurch erhält, dass man die neue X'-Achse im Abstand $+1$ von der alten annimmt, die Y-Achse aber unverändert lässt (Fig. 2). Nun lauten die Glieder niederster Dimension von $f(xy)$

$$(y^{\Delta'} - {}^{\Delta'}_{1} x^{\beta_1})^{\Delta_1},$$

also sind diejenigen von $f'(y)$:

$$\Delta' \Delta_1 y^{\Delta'-1}(y^{\Delta'} - b_1^{\Delta'} x^{\beta_1})^{\Delta_1-1},$$

d. h., sie enthalten den Factor $(y^{\Delta'} - b_1^{\Delta'} x^{\beta_1})$ $(\Delta_1 - 1)$ mal. Transformirt man nun $f'(y)$ mittelst der Transformationsgleichung

$$y = u_1 + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}},$$

so transformiren sich diese besagten Glieder in Punkte, welche auf die Strecke AA' zu liegen kommen; auf $A'B_1'$ liegen keine Punkte; denn die Entfernung des Punktes A von der neuen X'-Achse beträgt $\Delta_1 - 1$ Einheiten (vergl. S. 16). Es enthält nun die transformirte Function

$$f(x, y) = f\left(x, u_1 + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right) = f_1(x, u_1)$$

den Ausdruck $\left(u_1 - b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}\right)$ als Δ_1-fachen Factor, woraus folgt, dass auch die transformirte Function von $f'(y)$ denselben Ausdruck als $(\Delta_1 - 1)$-fachen Factor enthält; denn

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f_1(x, u_1)}{\partial u_1}.$$

Transformirt man der Reihe nach $f'(y)$ durch dieselben Transformationsgleichungen, die zur Reihenentwicklung von $f(xy) = 0$ nothwendig waren, so erkennt man analog, dass die aufeinander folgenden Geraden niederster Dimension von $f(xy)$ zusammenfallen mit entsprechenden Geraden niederster Dimension von $f'(y)$, solange bei den Transformationen noch mehrfache Factoren sich ergeben. Die Glieder niederster Dimension jedoch, welche den letzten kritischen Exponenten ergeben, also der Geraden $A^{(r-1)}M_1$ entsprechen, sind (vergl. S. 18):

$$R \cdot \left[z_1^{\Delta^{(r)}} - m_1^{\Delta^{(r)}} x^{\frac{\mu_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(r-1)}}} \right].$$

Für die entsprechende transformirte Function von $f'(y)$ erhält man also

$$R \cdot \Delta^{(r)} \cdot z_1^{\Delta^{(r)}-1},$$

und wenn hier die Transformation

$$z_1 = z_2 + m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}}$$

durchgeführt wird, so ergiebt sich ein Glied in x allein, das auf den Punkt $A^{(r)}$ der X'-Achse zu liegen kommt. Bei den weiteren Transformationen bleibt dieses Glied unverändert; denn kein anderes Glied kann auf $A^{(r)}$ fallen. Ersetzt man also sämmtliche Transformationen von $f'(y)$ durch eine einzige

$$y = z_p + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + m_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots + m_p x^{\frac{\mu_p}{\Delta}},$$

wo p beliebig, und setzt $z_p = 0$, d. h., ersetzt man in $f'(y)$ y durch seine Reihenentwicklung in x, so erhält man eine Reihe von Potenzen in x,

deren niederste Potenz den Exponenten $O'A^{(r)}$ hat. Nun ist aber (vergl. S. 19):

$$32)\quad \left\{ \begin{aligned} O'A^{(r)} = \xi = \frac{2N}{\Delta} &= (\Delta - \Delta_1).\frac{\beta_1}{\Delta'} + (\Delta_1 - \Delta_2)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''} + \cdots \\ &+ (\Delta_{r-1} - 1)\,\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}. \end{aligned} \right.$$

Wir können daher den folgenden Satz aussprechen: Die niederste Potenz, die man erhält, wenn man in $f'(y)$ für y die aus $f(xy) = 0$ erhaltene Potenzreihe von y nach Potenzen von x setzt, ist $x^{\frac{2N}{\Delta}}$.

Man kann diesen Satz auch durch andere Ueberlegungen bekommen. Nach Smith (a. a. O.) ist nämlich der Grad der Resultante aus $f(xy)$ und $f'(y)$ gleich dem Discriminantenindex $2N$. Nun erhält man aber die Resultante, wenn man das Product der Δ-Entwicklungen in $f'(y)$ einsetzt.

Geht man nun zum Integral w_1 (31) zurück, so hat man in der Zählerfunction die Coefficienten sämmtlicher Glieder gleich Null zu setzen, deren Exponenten nicht grösser sind als $\frac{2N}{\Delta} - 1$. Man kann nun zeigen, dass man, um den Zähler der Function unter dem Integral zu bekommen, sich begnügen kann, in der willkürlichen Function $\varphi(xy)$ statt y die mit dem letzten kritischen Exponenten abgebrochene Reihe einzusetzen. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) = A_0 + B_0 x + B_1\Big(b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + m_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots\Big) \\ + C_0 x^2 + C_1 x\Big(b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + \ldots\Big) + C_2\Big(b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}}\Big)^2 \\ + D_0 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Ordnet man nach Potenzen von x, so ist zu erkennen, dass es blos ein einziges Glied mit $x^{\frac{\mu_1}{\Delta}}$ giebt, wenn $\frac{\mu_1}{\Delta}$ der letzte kritische Exponent ist; dieses Glied ist $B_1 m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}}$, und es ist also $B_1 = 0$, wenn $\frac{\mu_1}{\Delta} \leqq \frac{2N}{\Delta} - 1$. Wenn aber $\frac{\mu_1}{\Delta} > \frac{2N}{\Delta} - 1$, so haben der letzte kritische Exponent und auch die folgenden keinen Einfluss auf das Verschwinden von B_1 und um so mehr keinen Einfluss auf das Verschwinden der übrigen Coefficienten $C_1, C_2 \ldots$ Im ersten Fall ist $C_1 x . m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} = C_1 m_1 x^{1+\frac{\mu_1}{\Delta}}$ das einzige Glied mit diesem Exponenten; ist wieder $C_1 = 0$ zu setzen, so ist $2C_2 b_1 m_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'} + \frac{\mu_1}{\Delta}}$ das einzige Glied, das für sich verschwinden muss etc. Wir sehen also, dass von jedem Klammerausdruck das niederste Glied, in dessen Exponenten zum ersten Mal der Nenner Δ vorkommt, den Entscheid geben

muss, ob der Coefficient zu verschwinden hat oder nicht, wenn nicht schon ein Glied mit niederem Exponenten das Verschwinden des Coefficienten gefordert hat. Jedenfalls aber ersehen wir, dass die auf den Exponenten $\frac{\mu_1}{\Delta}$ folgenden Exponenten keinen Einfluss mehr ausüben können; d. h., beim Einsetzen der Reihenentwicklung für y in $\varphi(xy)$ darf man sich mit der abgebrochenen Reihe bis zum letzten kritischen Exponenten begnügen.

Die Bestimmung der in einem superlinearen Zweig, welcher durch eine Reihenentwicklung von der Form 10) gegeben sein soll, sich adjungirt verhaltenden Curve reducirt sich demnach auf folgende Rechnung:

Setze die mit dem letzten kritischen Exponenten abgebrochene Reihe 10) für y in die allgemeine Function $\varphi(xy)$ ein, ordne dieselbe nach Potenzen von x und setze sämmtliche Coefficienten $= 0$, deren Exponenten nicht grösser sind als $\frac{2N}{\Delta} - 1$, wo $\frac{2N}{\Delta}$ durch Gleichung 32) bestimmt ist. Die Curve $\varphi(xy) = 0$, deren Coefficienten den dadurch erhaltenen Bedingungsgleichungen genügen, verhält sich adjungirt in dem singulären Punkt einer Curve, die den superlinearen Zweig 10) enthält, und ist zugleich die allgemeinste ihrer Art.

Die Verallgemeinerung dieser Methode auf den Fall, dass die Curve $f(xy) = 0$ im Ursprung mehrere superlineare Zweige hat, macht keine Schwierigkeit. Man bestimmt der Reihe nach die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Function $\varphi(xy)$, die bewirken, dass das Integral 29) endlich wird, sofern man y der Reihe nach ersetzt durch die Reihenentwicklungen, die den superlinearen Zweigen entsprechen. Auch hier kann die niederste Potenz in x von $f'(y)$, wenn y durch eine Reihenentwicklung ersetzt wird, in den kritischen Exponenten der Reihenentwicklungen ausgedrückt werden dadurch, dass man wiederum die Geraden niederster Dimension zeichnet, welche die einzelnen Reihenentwicklungen ergeben.

Die eben entwickelte Methode der Bestimmung der adjungirten Curve ist im Allgemeinen mit ziemlich umständlichen Rechnungen verknüpft. Da nun die adjungirte Curve gewöhnlich ebenfalls in dem singulären Punkte der ursprünglichen Curve eine Singularität enthält, so müssen auch noch aus der Gleichung der adjungirten Curve die Reihenentwicklungen gebildet werden, und diese Rechnung ist äussert mühsam, da aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der Function $\varphi(xy)$ zuerst die gewöhnliche Form von $\varphi(xy)$ hergestellt werden muss. Wir geben deshalb noch in Folgendem eine graphische Methode an, welche namentlich, wenn zugleich die Reihenentwicklungen der adjungirten Curve verlangt werden, wesentlich rascher zum Ziele führt.

Die Curve $f(xy) = 0$ habe wieder im Ursprung einen superlinearen Zweig von der Form 10), und es ist also eine Function $\varphi(xy)$ derart zu bestimmen, dass der niederste Exponent der Potenzen in x, welche durch Ersetzen von y durch die Reihenentwicklung 10) erhalten werden, grösser ist als $\frac{2N}{\Delta} - 1$. Dieses Ersetzen von y durch die Reihenentwicklung kann dadurch geschehen, dass man $\varphi(xy)$ durch die Reihe der Substitutionen, die man zur Reihenentwicklung von $f(xy) = 0$ bis zum letzten kritischen Exponenten nöthig hatte, transformirt, d. h. man setzt:

$$y = z + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}},$$

führt diese Transformationen nach der Cramer'schen Methode der Reihe nach durch, und setzt schliesslich $z = 0$. Denkt man sich die Function $\varphi(xy)$ in das Newton'sche Parallelogramm mit X'-Achse und Y-Achse als Achsen eingetragen (Fig. 4, vergl. auch Fig. 2) und macht $O'P = \frac{2N}{\Delta} - 1$, so erkennt man, dass $\varphi(xy) = 0$ sich dann adjungirt verhält, wenn $\varphi(xy)$ bei der letzten Transformation Punkte auf der X'-Achse ergiebt, die blos rechts von P liegen. Zieht man durch P die Parallele PQ mit der Geraden niederster Dimension, die den ersten kritischen Exponenten $\frac{\beta_1}{\Delta'}$ ergab, so transformiren sich alle Glieder auf der dem Ursprung abgewendeten Seite der Geraden QP derart, dass die Geraden, durch welche diese Transformation ausgeführt wird, die X'-Achse in Punkten rechts von P schneiden. Da $\beta_1 > \Delta'$, so dürfen alle Glieder, jedes mit willkürlichem Coefficienten, deren Grade in x und y zusammen grösser sind als $\frac{2N}{\Delta} - 1$, in der Gleichung der adjungirten Curve vorkommen. Ist p die nächst höhere ganze Zahl zu $\frac{2N}{\Delta} - 1$, so sind die Glieder niedersten Grades der adjungirten Curve, die beliebige Coefficienten haben dürfen, vom Grad p; die adjungirte Curve hat im singulären Punkte der Curve $f(xy)$ p lineare Zweige mit beliebigen Tangenten.

Die so erhaltene zu dem superlinearen Zweig adjungirte Curve ist aber nicht die allgemeinste; vielmehr kann man noch eine Reihe von Gliedern finden, welche die adjungirte Curve enthalten darf, deren Coefficienten aber nicht mehr beliebig sind, sondern in gewissen Beziehungen zu einander stehen. Diese Glieder sind nun nicht mehr blos von den kritischen Exponenten des superlinearen Zweiges abhängig, sondern auch von den anderen Exponenten und den Coefficienten der Glieder der Reihenentwicklung. Zieht man die Gerade PQ_1 parallel der Geraden niederster

Dimension, die den auf den ersten kritischen Exponenten folgenden (im Allgemeinen nicht kritischen) Exponenten ergiebt, so kann man sich Aggregate von Gliedern denken, welche bei der ersten Transformation in das Dreieck QPQ_1 fallen und welche dann bei der zweiten Transformation, die durch Parallelen zu PQ_1 ausgeführt wird, Punkte auf der X'-Achse ergeben, die rechts von P fallen. Solche Glieder liegen auf Parallelen zu PQ, z. B. auf CDE, und zwar müssen dieselben einen mehrfachen Factor von der Form $(y^{\Delta'} - b_1^{\Delta'} x^{\beta_1})$ haben; hat nämlich D eine Ordinate zwischen m und $m+1$, so müssen die Glieder auf CE den obigen Factor $(m+1)$mal enthalten. Denn blos dann erhält man bei der ersten Transformation blos Glieder auf der Strecke CD; im Uebrigen können die noch verfügbaren Coefficienten beliebig genommen werden. Ist es unmöglich, solche Glieder zu finden, so enthält die adjungirte Curve blos die Glieder mit beliebigen Coefficienten, welche auf der dem Ursprung abgewendeten Seite von PQ liegen. Im anderen Falle zieht man die Gerade QP_2 parallel der Geraden niederster Dimension, die den dritten Exponenten ergiebt, und sucht solche Glieder, welche bei der ersten Transformation auf die dem Ursprung zugewendete Seite von PQ_1 fallen und zugleich bei der zweiten Transformation auf die dem Ursprung abgewendete Seite von PQ_1 fallen. In dieser Weise ist fortzufahren bis zu der Transformation, die den letzten kritischen Exponenten ergiebt.

Nachdem auf graphische Weise die Function $\varphi(xy)$ bestimmt ist, können auch ohne weitere Rechnung die Reihenentwicklungen derselben angegeben werden. Es lässt sich ersehen, dass die niedersten Glieder von $\varphi(xy)$ bei den Transformationen blos solche mehrfache Factoren enthalten können, welche auch bei den Transformationen von $f(xy)$ als mehrfache Factoren auftraten. Daraus folgt, dass die adjungirte Curve Reihenentwicklungen liefert, deren Glieder bis zu ihren letzten kritischen Exponenten übereinstimmen, sowohl den Exponenten als auch den Coefficienten nach mit Anfangsgliedern des gegebenen superlinearen Zweigs; diese Zweige der adjungirten Curve berühren also den letzteren Zweig. Daneben erhält man im Allgemeinen noch eine Reihe linearer Zweige mit blos einem kritischen Exponenten, die in keinem Glied mit der gegebenen Reihe übereinstimmen.

Wir unterlassen es, der grossen Umständlichkeit halber, anzugeben, wie diese graphische Methode durch die Rechnung ersetzt werden kann. Aber es ist selbstverständlich, dass die geometrische Konstruction rechnerisch verfolgt werden kann.

Beispiel: Eine Curve enthalte im Ursprung den superlinearen Zweig von der Ordnung 6:

$$y = x - x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{13}{6}} + \cdots$$

Es sollen die Reihenentwicklungen der adjungirten Curve bestimmt werden.

Es ist

$$\Delta = 6; \quad \Delta_1 = 6; \quad \Delta_2 = 2; \quad \Delta_3 = 1; \quad \Delta' = 1; \quad \Delta'' = 3; \quad \Delta''' = 2;$$

also

$$\beta_1 = 1; \quad \gamma_1 = 4; \quad \delta_1 = 13,$$

$$2N = (6-6).1.6 + (6-2).4.2 + (2-1).13.1 = 45$$

und

$$\frac{2N}{\Delta} - 1 = \frac{45}{6} - 1 = 6\tfrac{1}{2}.$$

Man mache $O'P = 6\frac{1}{2}$ (Fig. 5); ziehe die Geraden PQ, PQ_1, PQ_2 derart, dass die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel dieser Geraden gegen die X'-Achse resp. $1, \frac{3}{4}, \frac{6}{11}$ sind. Die Glieder, welche auf der vom Ursprung abgewendeten Seite von PQ liegen, dürfen vorkommen, jedes mit beliebigem Coefficienten; diese Glieder sind von der siebenten Ordnung; also verhält sich eine Curve, die sieben lineare Zweige durch den Ursprung enthält, adjungirt. Nun nehme man die Glieder auf a, b, c, d, e, f so an, dass sie $(y-x)^3$ als Factor enthalten, also von der Form sind:

$$(y-x)^3(Ax^2 + Bxy + Cy^2);$$

die Glieder auf $g, h, \ldots n$ lasse man einstweilen beliebig. Es werden sich also die Glieder auf $a, \ldots f$ bei der Transformation $y = u + x$ auf a, b, c transformiren, und nun kann man die Coefficienten der Glieder auf $g, h, \ldots n$ so specialisiren, dass nach der ersten Transformation je die beiden Glieder auf b und m, sowie c und n den Factor $u + x^{\frac{4}{3}}$ enthalten, denn bm und cu sind parallel PQ_1. Bei der nächsten Transformation fallen alle transformirten Glieder auf Punkte, die auf der dem Ursprung abgewendeten Seite von PQ_2 liegen, also auch bei allen noch folgenden Transformationen. Damit ist $\varphi(xy)$ vollständig bestimmt; denn es können keine anderen Glieder mehr vorkommen. Die Glieder niederster Dimension sind die auf $a, b, \ldots f$ liegenden, und zwar von der Form

$$(y-x)^3(Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Der zweite Factor zeigt an, dass man zwei lineare Zweige von der Form

1)
$$\begin{cases} y = ax + bx^2 + \cdots \\ y = a_1 x + b_1 x^2 + \cdots \end{cases}$$

erhält. Der erste Factor erfordert die Transformation $y = u + x$, worauf die Gerade cn Gerade niederster Dimension wird; diese enthält den Factor $u + x^{\frac{4}{3}}$ einfach, also lautet die weitere Reihenentwicklung:

2)
$$y = x - x^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{3}} + \cdots$$

Die adjungirte Curve hat also die zwei linearen Zweige 1) und einen Zweig 2) dritter Ordnung, dessen zwei erste Glieder mit der gegebenen Reihenentwicklung übereinstimmen.

Diese Methode kann auf Curven mit jeder beliebigen Singularität ausgedehnt werden. Wir beschränken uns jedoch auf ein einzelnes Beispiel: Es soll die adjungirte Curve zu einem k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten gefunden werden. Da die Glieder niederster Dimension die Form

$$a_0 y^k + a_1 y^{k-1} x + \cdots a_k x^k$$

haben, so ist AB (Fig. 6) Gerade niederster Dimension, wobei $OA = OB = k$. Da AB diejenige Gerade ist, welche die letzten kritischen Exponenten ergiebt, so bestimmt man den Schnitt A' der Geraden parallel der X-Ache im Abstand 1 (neue X'-Achse) und der Geraden AB, macht $PA' = 1$, so dass also $O'P = k - 2$. Es darf dann die adjungirte Curve sämmtliche Punkte enthalten, die auf der vom Ursprung abgewendeten Seite von PQ liegen, und dies sind die Glieder von der Ordnung $k - 1$; da dieselben beliebige Coefficienten haben, so zerfällt die Entwicklung in $k - 1$ lineare Zweige, woraus also der bekannte Satz folgt: Die allgemeinste adjungirte Curve geht $(k - 1)$mal durch einen k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten.

Mit Hilfe der Entwicklungen von § 4 sind wir in den Stand gesetzt, diese graphische Methode so zu modificiren, dass die Zeichnung umgangen werden kann. Wir gehen hierzu aus von der rationalen Form der Curve, haben also, wenn blos die Reihenentwicklung des superlinearen Zweiges gegeben ist, nach § 1 zuerst die rationale Form herzustellen.

Die gegebene Curve sei von der Form 28) und liefere für die Umgebung des singulären Punktes eine Reihenentwicklung von der Form 10). Nach Früherem hat die Gleichung der adjungirten Curve die Eigenschaft, dass die niederste Potenz in x, sofern man y durch die Reihenentwicklung 10) ersetzt, höher wird als $x^{\frac{2N}{\Delta}-1}$. Benützen wir die Bezeichnung des § 4, so ist die allgemeinste Form, die eine solche Curve haben kann:

33) $\Sigma\, const\, x^p y^q [\Phi_{11}(xy)]^{r_1} [\Phi_{12}(xy)]^{r_2} \ldots [\Phi_{1m}(xy)]^{r_m} [\Phi_{21}(xy)]^{s_1} \ldots [\Phi_{r-1,o}(xy)]^{v_o}$,

wo $\Phi_{r-1,o}(xy)$ der Theil der Function 28) ist, welcher nothwendig ist zur Bestimmung der Reihenentwicklung bis zu dem Exponenten, der dem letzten kritischen vorangeht, und wo folgender Bedingung genügt wird:

$$p + \frac{\beta_1}{\Delta'} q + \frac{B_1}{\Delta'} r_1 + \frac{B_2}{\Delta'} r_2 + \cdots \frac{B_m}{\Delta'} r_m + \frac{\Gamma_1}{\Delta' \Delta''} s_1 + \cdots$$
$$+ \frac{A_o}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(r-1)}} v_o > \frac{2N}{\Delta} - 1.$$

Da die linke Seite eine Zahl ergiebt, deren Nenner höchstens $\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(r-1)}$ ist, so ist die niederste Zahl, die von der linken Seite

erreicht werden darf, der nächste Werth nach $\frac{2N}{\Delta} - 1$, der den Nenner $\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}$ hat. Sei dieser $\frac{M}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}$, so wird obige Bedingung:

$$34) \quad p + \frac{\beta_1}{\Delta'} q + \frac{B_1}{\Delta'} r_1 + \cdots \frac{A_0}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}} \geqq \frac{M}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}.$$

Um nun noch die Reihenentwicklungen der allgemeinsten adjungirten Curve zu finden, hat man die Glieder niederster Dimension, welche die adjungirte Curve enthalten darf, aufzusuchen. Man kann sich jedenfalls auf diejenigen Ausdrücke der Summe 33) beschränken, bei welchen die rechte Seite der Bedingung 34) den kleinsten Werth erreicht. Unter diesen hat aber wieder derjenige Ausdruck den niedersten Grad, der den höchsten Exponenten v_o hat; denn

$$\Phi_{r-1,1}(xy),\ \Phi_{r-1,2}(xy)\ldots\ \Phi_{r-1,o}(xy)$$

haben dasselbe niederste Glied in y allein, nämlich $y\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}$. Wird aber y durch die Reihe ersetzt, so ergiebt die letzte Function eine höhere Potenz in x als die vorletzte, diese wiederum eine höhere Potenz als die nächst vorhergehende etc. Man wählt also unter den möglichen Ausdrücken diejenigen mit dem höchsten Exponenten in $\Phi_{r-1,o}(xy)$, unter der dadurch ausgeschiedenen Gruppe von Ausdrücken diejenigen mit dem höchsten Exponenten in $\Phi_{r-1,o-1}(xy)$ etc. und kommt auf diese Weise zu Ausdrücken von der Form

$$35) \qquad const\ x^{p'}y^{q'}[\Phi_{11}(xy)]^{r_1'}\ldots[\Phi_{r-1,o}(xy)]^{v_o'},$$

welche die Glieder niederster Dimension der adjungirten Curve repräsentiren. Diese Form zeigt uns, dass wir je v', $v'_{o-1}\ldots r'_1$ Entwicklungen erhalten, die mit der Reihenentwicklung des gegebenen superlinearen Zweigs übereinstimmen resp. bis zum ersten, zweiten ... Gliede der gegebenen Reihenentwicklung vor dem Glied mit dem letzten kritischen Exponenten. Dazu treten noch q' lineare Entwicklungen von der Form $y = ax + bx^2 + \cdots$, und, wenn der Ausdruck 35) kein Glied mit y allein enthält, d h., wenn p' nicht gleich Null, so treten noch eine weitere Anzahl linearer Entwicklungen hinzu, die man dadurch erhält, dass man die Summe der Anzahl der Ordnungen aller bisher gefundenen Entwicklungen bestimmt und diese Zahl abzieht von dem Potenzexponenten der niedersten Potenz in y allein, welche die adjungirte Curve enthalten darf. Diese letztere Zahl, welche die Anzahl der Ordnungen sämmtlicher Reihenentwicklungen der adjungirten Curve ist, erhält man aus einem Ausdruck, den man analog dem Ausdruck 35) bestimmt, wobei von vornherein $p' = 0$ gesetzt wurde. Die Differenz dieser beiden Zahlen liefert die Anzahl der linearen Entwicklungen, die noch hinzutreten. Da die Coefficienten aller Ausdrücke von 33) von

einander unabhängig sind, so können die so bestimmten Entwicklungen sich nicht zu höheren superlinearen Zweigen zusammenordnen.

Beispiel. Wir wählen das Beispiel, das wir früher nach der graphischen Methode behandelt hatten.

Die Curve

$$f(xy) = [(y-x)^3 + x^4]^2 - 9(y-x)^2 x^7 = 0$$

giebt die Reihenentwicklung

$$y = x - x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{13}{6}} + \cdots$$

Die Theile von $f(xy)$, welche zur Bestimmung der zwei ersten Exponenten nothwendig sind, lauten:

$$y - x \quad \text{und} \quad (y-x)^3 + x^4.$$

Setzt man in jedem für y die Reihenentwicklung, so ergeben sich als niederste Potenzen in x die Potenzen $x^{\frac{4}{3}}$ und $x^{\frac{29}{6}}$. Da $\frac{2N}{\Delta} - 1 = 6\frac{1}{2}$, so ist die adjungirte Curve von der Form:

$$\Sigma\, const\, x^p y^q (y-x)^r [(y-x)^3 + x^4]^s,$$

wobei die Bedingung erfüllt sein muss:

$$p + q + \frac{4}{3} r + \frac{29}{6} s > 6\tfrac{1}{2}.$$

Der Ausdruck, für welchen die rechte Seite am kleinsten wird, entspricht den Werthen

$$s = 1; \quad r = 0; \quad p + q = 2,$$

woraus der Ausdruck niederster Dimension

$$[(y-x)^3 + x^4]\,[Ax^2 + Bxy + Cy^2],$$

und dieser giebt unmittelbar die Reihenentwicklungen:

$$y = ax + bx^2 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + b_1 x^2 + \cdots,$$
$$y = x - x^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

in Uebereinstimmung mit dem auf S. 33 gefundenen Resultat.

Fig. 1.

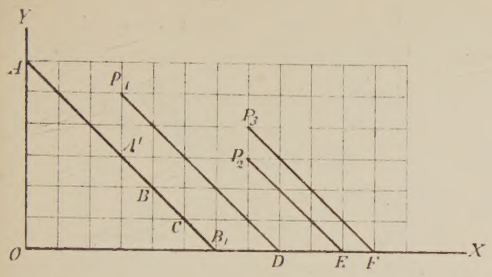

Fig. 3.

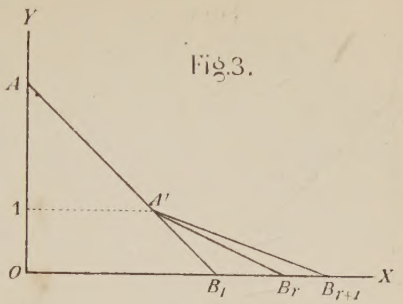

Fig. 2.

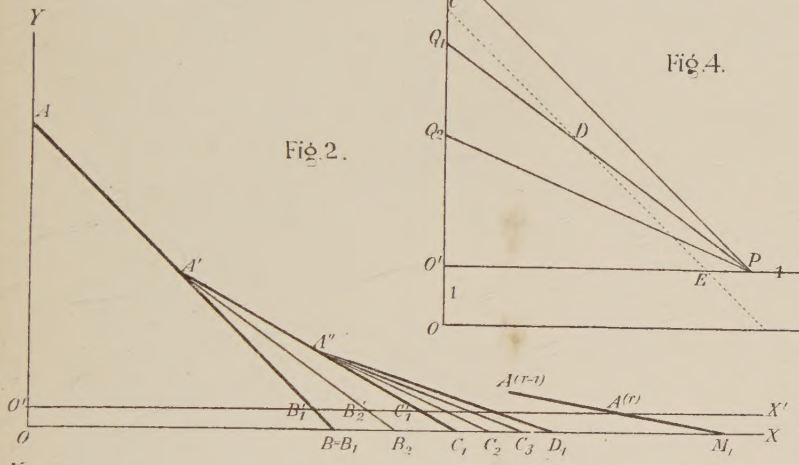

Fig. 4.

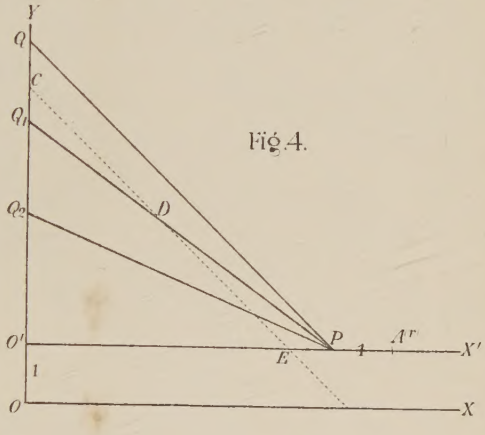

Fig. 5.

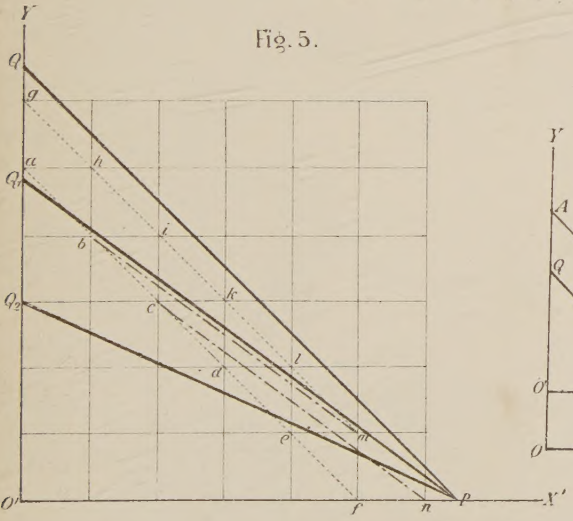
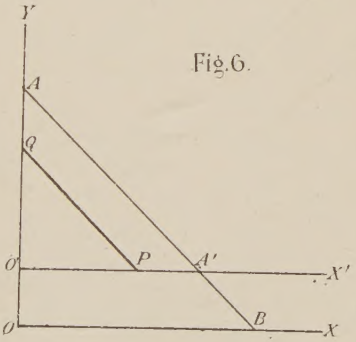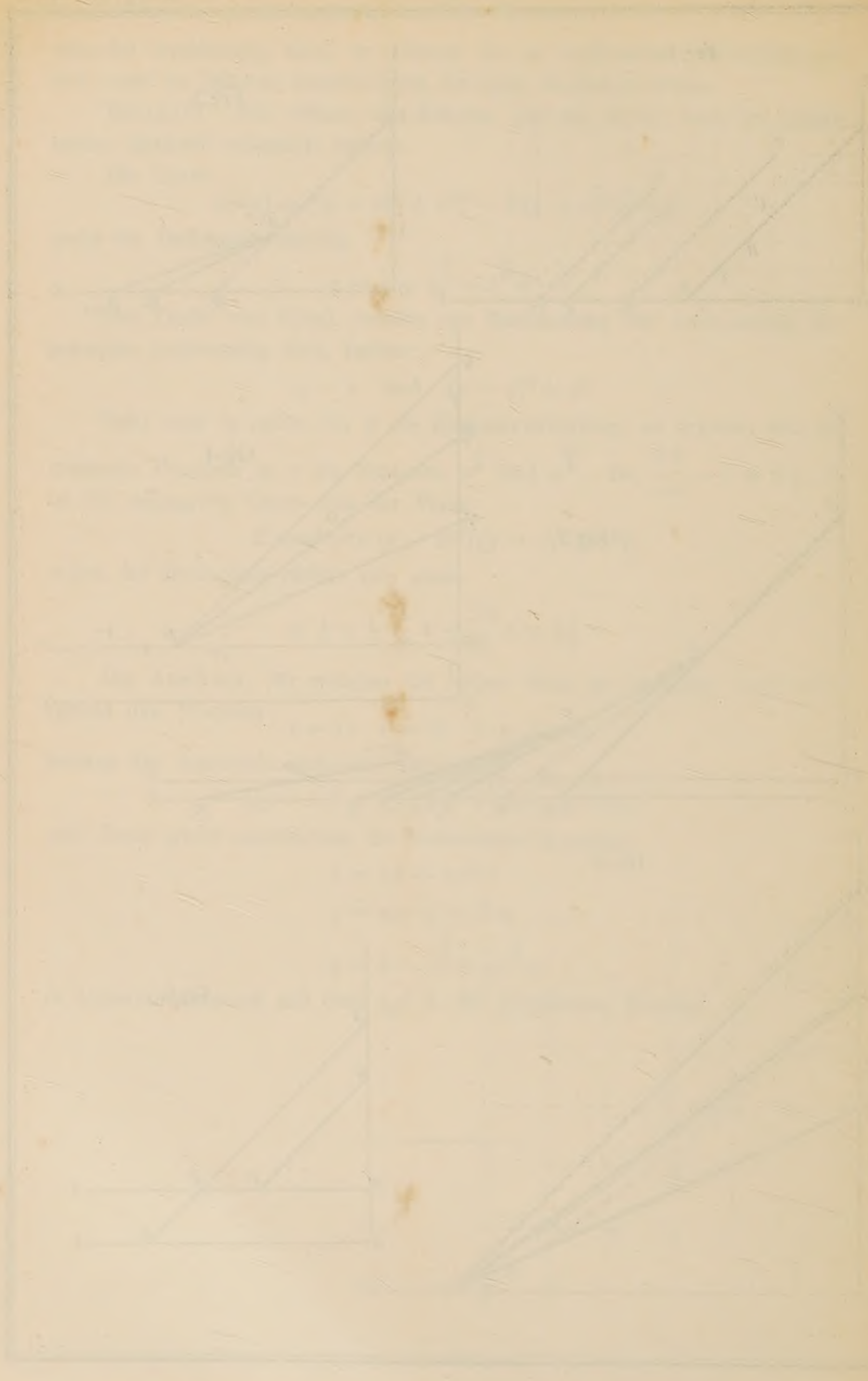
Fig. 6.